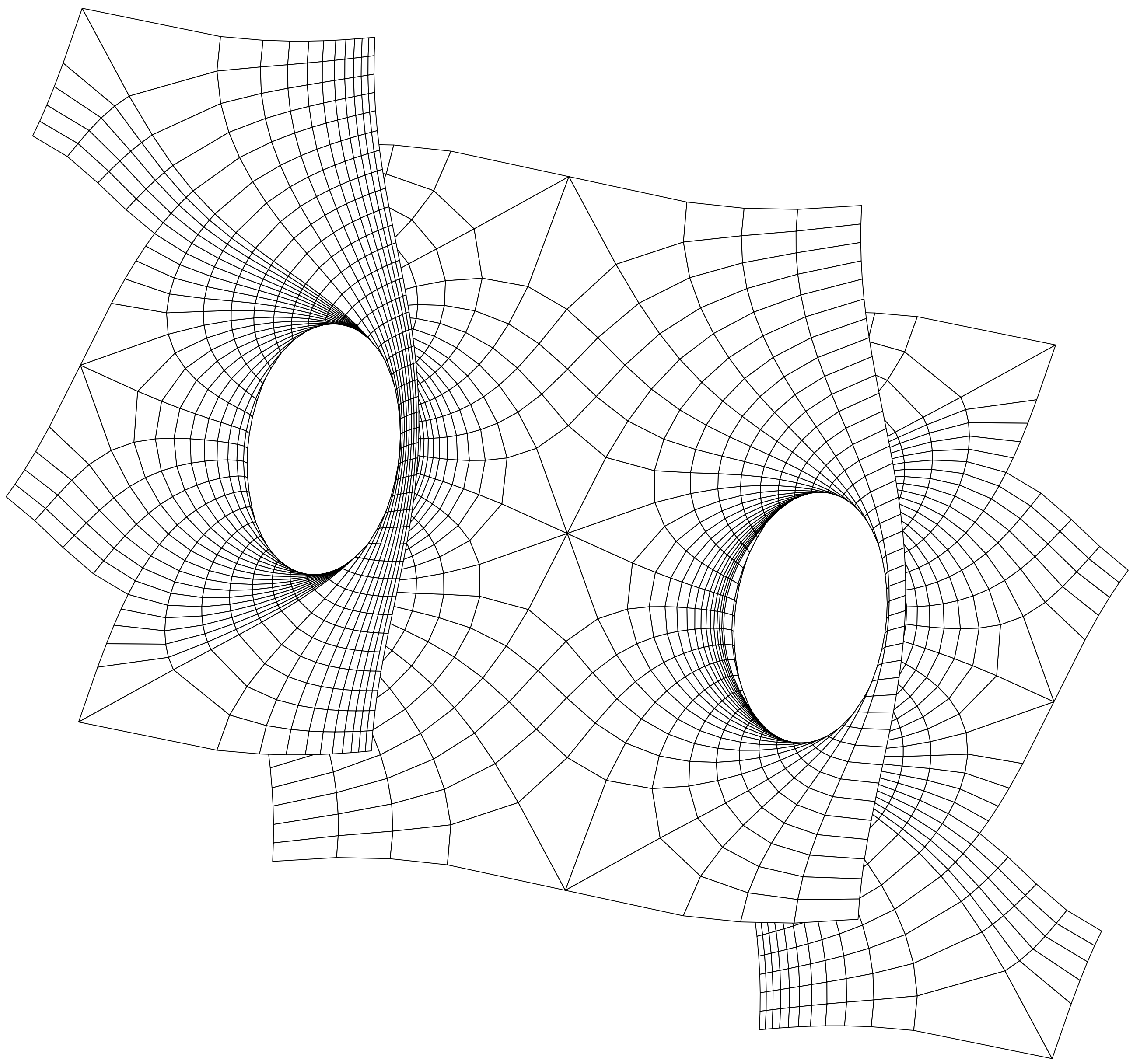
RHEINISCHE FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT

BONN

Doppelt periodische elliptische Minimalflächen

Diplomarbeit

von Christian Teitzel



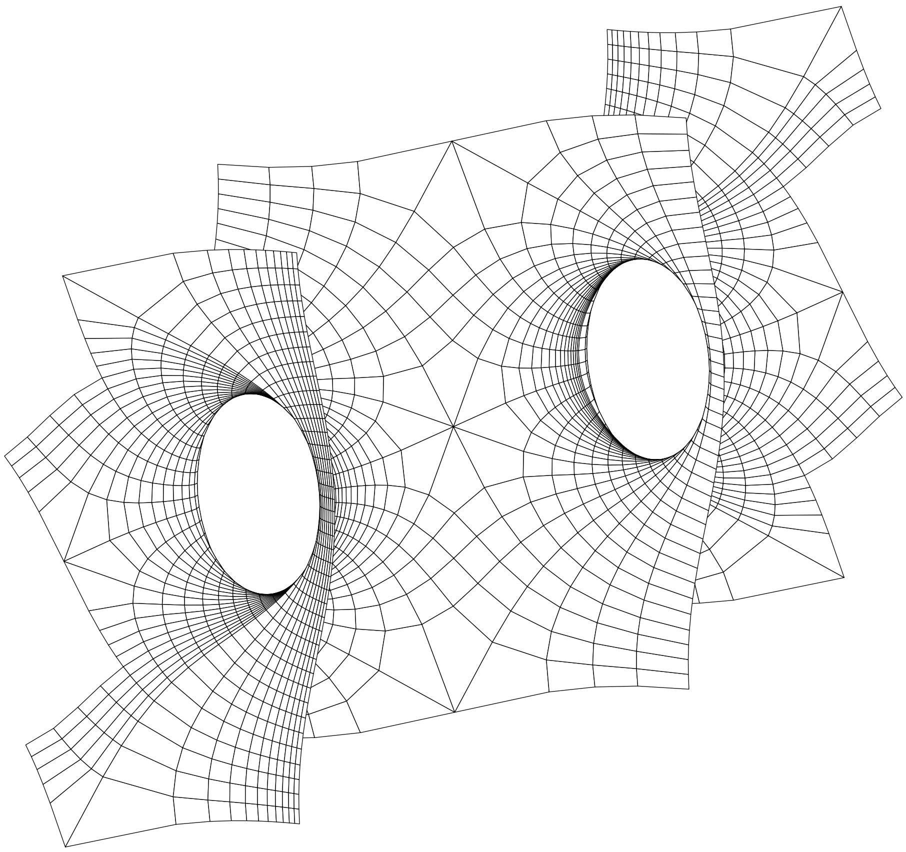
Doppelt periodische elliptische Minimalflächen

Diplomarbeit

von Christian Teitzel

Mathematisches Institut
Universität Bonn
Beringstr. 3
53115 Bonn

Juni 1995



Vorwort

Das älteste Beispiel einer vollständigen, eingebetteten, doppelt periodischen Minimalfläche stammt von Hans Ferdinand Scherk aus dem Jahr 1835 (siehe Abbildung 2.1 auf Seite 30, Abbildung 2.3 auf Seite 34 und vergleiche [30]). Weitere Exemplare solcher Flächen konnten zunächst nicht entdeckt werden, bis H. Karcher 1988 eine Familie vollständiger, eingebetteter, zweifach periodischer Flächen vom Geschlecht 1 mit vier parallelen Scherk-Enden konstruiert hat (vgl. [15, Section 4], [16, Section 3.3] und Kapitel 3). Seitdem sind durch Einfügen von zusätzlichen Henkeln in die symmetrischsten Beispiele dieser Familie eine Reihe weiterer Flächenscharen gefunden worden. Im Jahr 1992 hat F. Wei eine 1-Parameter Flächenfamilie vom Geschlecht 2 konstruiert (vgl. [35]). Anschließend haben H. Karcher, K. Polthier und E. C. Thayer bemerkt, daß man eine weitere 1-Parameter Schar von Flächen vom Geschlecht 2 erhält, wenn der zusätzliche Tunnel auf eine andere Art und Weise eingebaut wird (vgl. [33]). Schließlich haben E. C. Thayer und M. Wohlgemuth drei unterschiedliche 1-Parameter Flächenfamilien vom Geschlecht 3 entdeckt (s. [33]).

Großes Interesse an eingebetteten, zweifach periodischen Minimalflächen zeigen auch Chemiker, um mit ihrer Hilfe Trennflächen zwischen Polymeren zu modellieren.

In der vorliegenden Arbeit werden vollständige, eingebettete, zweifach periodische Minimalflächen vom Geschlecht 1 mit vier parallelen Scherk-Enden untersucht. Dafür werden im ersten Kapitel spezielle elliptische Funktionen konstruiert. Das zweite Kapitel bringt eine Zusammenfassung bekannter Sachverhalte über die Grundlagen der Minimalflächentheorie, die später benötigt werden. Im dritten Kapitel dieser Arbeit wird zunächst die 3-Parameter Familie, die H. Karcher 1988 entdeckt hat, genau untersucht; hierbei sind erstmals von den am wenigsten symmetrischen Flächen (s. Abschnitt 3.4 und 3.5) Bilder erzeugt worden. Zuletzt wird dann im vierten Kapitel überlegt, auf welche Weise neue, vollständige, eingebettete, zweifach periodische Flächen vom Geschlecht 1 mit vier Enden entstehen könnten.

Einen zusätzlichen Schwerpunkt bei der Erstellung dieser Arbeit bildete die Visualisierung der darin vorkommenden Minimalflächen. Einerseits sollten die Flächen möglichst gut sichtbar gemacht werden, andererseits mußte das Computerprogramm, mit dem dies inzwischen verwirklicht worden ist, erst noch entwickelt werden. In diesem Zusammenhang bedeutet „möglichst gut“, daß auf der Minimalfläche Linien erzeugt werden müssen, die die geometrische Gestalt der Fläche optisch unterstützen. Geraden und ebene Geodätische auf der Fläche sollten auch als Parameterlinien auf ihr vorhanden sein. Außerdem sollte das Liniennetz auf der Fläche mit Ausnahme der Verzweigungspunkte der verwendeten Karte eine rechtwinklige Struktur haben. Meistens sehen Linienverteilungen, die auf Grund von Polarkoordinatenzentren in den Enden der Minimalfläche entstehen, sehr instruktiv aus. Manchmal ergibt auch eine Höhenlinienparametrisierung einen sehr guten räumlichen Eindruck von der Fläche. Derartige Parameterlinien auf Flächen zu erzeugen, mußte erst an vielen Beispielflächen geübt werden.

Zur interaktiven, graphischen Darstellung von Minimalflächen mit Hilfe von Weierstraßdaten auf einem Rechner wurde das Programm AMANDUS, das nach Hermann Amandus Schwarz benannt ist, als Teilprojekt des am Sonderforschungsbereich 256 der Universität Bonn entstandenen Graphikpakets GRAPE von Andreas Arnez, Bernd Oberknapp, Dr. Konrad Polthier, Martin Steffens und mir entwickelt und implementiert. Hierbei wurden sowohl die Vorzüge von GRAPE, insbesondere das Zeitkonzept (siehe hierzu [26]), das es erst ermöglicht, parameterabhängige Flächenfamilien interaktiv am Bildschirm zu untersuchen, ausgenutzt, als auch weitere, wichtige Algorithmen programmiert.

Über einige Minimalflächen, die mit Hilfe von GRAPE erzeugt wurden, sind in den letzten Jahren von Andreas Arnez, Dr. Konrad Polthier, Martin Steffens und mir mit dem Raytracingprogramm SOFTIMAGE sieben kürzere Videosequenzen und der etwa 40 minütige mathematische Computergraphikfilm „Touching Soap Films“ erstellt worden. Eine der erwähnten Videosequenzen zeigt eine Deformation der in Abschnitt 3.4 besprochenen Flächenschar.

Zum besseren Verständnis habe ich viele möglichst aussagekräftige Skizzen und Bilder beigefügt. Alle in dieser Arbeit abgebildeten Flächen wurden mit AMANDUS berechnet. Die beiden Farbfotos und das Bild der Costa-Fläche auf Seite 33 wurden mit dem oben genannten Raytracingpaket nachbearbeitet.

Ganz besonders danke ich Prof. Dr. Hermann Karcher, daß er mir die Bearbeitung dieses interessanten Themas in meiner Diplomarbeit ermöglicht und mich bei der Durchführung der vorliegenden Arbeit unterstützend betreut hat. Dr. Meinhard Wohlgemuth bin ich für zahlreiche Diskussionen über Minimalflächen dankbar. Bei der Numerik zur Visualisierung der Minimalflächen haben mir Bernd Oberknapp und Dr. Konrad Polthier wertvolle Hilfe geleistet.

Nicht zuletzt gilt mein herzlicher Dank Andreas Arnez und Martin Steffens, die mit mir viel über theoretische und numerische Probleme diskutiert und durch eine Menge Tips und lange Gespräche zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben.

Nun folgt noch eine Liste der verwendeten, allgemein üblichen und deshalb nicht ausführlich erklärten Symbole:

$\mathbf{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbf{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbf{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbf{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbf{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\mathbf{R}^+$	$\{r \in \mathbf{R} : r > 0\}$
$\mathbf{R}_0^+$	$\mathbf{R}^+ \cup \{0\}$
$\mathbf{R}_0^-$	$\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}^+$
$\hat{\mathbf{C}}$	$\mathbf{C} \cup \{\infty\}$
$\mathbf{S}^1$	Einheitskreis
$\mathbf{S}^2$	Einheitssphäre
$\mathbf{T}$	zweidimensionaler flacher Torus
$\mathbf{T}^3$	dreidimensionaler flacher Torus
$\Re(\cdot)$	Realteil
$\Im(\cdot)$	Imaginärteil
$\lvert \cdot \rvert$	Absolutbetrag
$\det(\cdot)$	Determinante
$\mathrm{spur}(\cdot)$	Spur
D^{90}, D^{180}	90°- bzw. 180°-Drehung
$(a, b]$	links offenes, rechts abgeschlossenes Intervall

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Kapitel 1

Elliptische Funktionen

An vielen Stellen dieser Arbeit wird von der Theorie elliptischer Funktionen Gebrauch gemacht. Deshalb werden die verwendeten Begriffe und Aussagen dieses Zweigs der Funktionentheorie hier kurz zusammengestellt. Die ersten beiden Abschnitte dieses Kapitels dienen der Erläuterung der Grundbegriffe und folgen im wesentlichen dem Buch von K. Chandrasekharan [3, Chapter I]. Auch alle Beweise können dort nachgelesen werden. Im dritten Abschnitt werden einige fundamentale Eigenschaften elliptischer Funktionen zusammengefaßt. Zur Herleitung dieser Eigenschaften sei auf [3, Chapter II] verwiesen. Anschließend betrachten wir in den darauffolgenden Abschnitten spezielle elliptische Funktionen, die im Zusammenhang mit Minimalflächen auf Tori nützlich sind. Der Beschreibung dieser Funktionen liegt eine Arbeit von D. Hoffman, H. Karcher und F. Wei [8, Chapter 3] zugrunde.

1.1 Periodische meromorphe Funktionen

In diesem Kapitel bezeichnet $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ eine in der ganzen komplexen Ebene meromorphe Funktion. Die Funktion f heißt periodisch, falls es eine komplexe Zahl $\omega \neq 0$ gibt, so daß für alle $z \in \mathbf{C}$ gilt: $f(z + \omega) = f(z)$. Die Zahl ω wird Periode von f genannt. Null ist die triviale Periode.

Die Funktion f ist genau dann konstant, wenn jede komplexe Zahl eine Periode von f ist. Falls $\omega \neq 0$ eine Periode von f ist, dann ist auch $n\omega$ für alle $n \in \mathbf{Z}$ eine Periode von f.

Die Funktionen $\sin(z)$, $\cos(z)$ und e^{iz} sind holomorphe Funktionen mit der Periode 2π, $\tan(z)$ und $\cot(z)$ sind meromorph mit Periode π.

Der Absolutbetrag aller nicht trivialen Perioden einer meromorphen Funktion f hat ein positives Minimum δ, falls die Funktion nicht konstant ist. Wenn ω_1 eine Periode von f ist, für die $|\omega_1| = \delta$ gilt, dann ist, wie schon oben erwähnt wurde, auch $n\omega_1$ für alle $n \in \mathbf{Z}$ eine Periode von f. Aus den beiden vorhergehenden Sätzen folgt, daß sich jede Periode ω von f, für die der Quotient $\omega/\omega_1 \in \mathbf{R}$ ist, mit einem geeigneten $n \in \mathbf{Z}$ als $\omega = n\omega_1$ schreiben läßt.

Falls die Funktion f eine Periode ω besitzt, so daß $\omega/\omega_1 \notin \mathbf{R}$ ist, dann sei ω_2 dasjenige ω mit dem kleinsten Absolutbetrag. Offensichtlich ist dann $m\omega_1 + n\omega_2$ für alle $m, n \in \mathbf{Z}$

ebenfalls eine Periode von f, und umgekehrt läßt sich jede Periode von f in der Form $m\omega_1 + n\omega_2$ schreiben, wie der nächste Satz zeigt.

Satz 1.1:
Es bezeichne Γ die Menge aller Perioden einer nicht konstanten meromorphen Funktion f, dann gilt entweder $\Gamma = \{0\}$ oder $\Gamma = \{n\omega_1\}$, wobei $\omega_1 \neq 0$ gilt und $n \in \mathbf{Z}$ ist, oder $\Gamma = \{m\omega_1 + n\omega_2\}$ mit $m, n \in \mathbf{Z}$ und $\Im(\omega_2/\omega_1) > 0$.

Die komplexe Zahl ω_1 ist eine Periode von f mit minimalem Absolutbetrag, und ω_2 ist eine Periode von f, die den kleinsten Betrag aller Perioden ω von f, die die Eigenschaft $\Im(\omega/\omega_1) > 0$ erfüllen, hat.

Eine nicht konstante meromorphe Funktion kann nicht mehr als zwei über $\mathbf{Q}$ linear unabhängige Perioden haben.

Eine meromorphe Funktion heißt einfach periodisch, wenn $\Gamma = \{n\omega_1\}$ ist, und zweifach periodisch, falls $\Gamma = \{m\omega_1 + n\omega_2\}$ gilt. Die Perioden ω_1 bzw. (ω_1, ω_2) nennt man reduzierte Perioden. Sie sind nicht eindeutig, da $-\omega_1$ bzw. $(-\omega_1, -\omega_2)$ ebenfalls reduzierte Perioden sind.

1.2 Elliptische Funktionen

Eine zweifach periodische meromorphe Funktion heißt elliptische Funktion.

Die Menge $\Gamma = \{m\omega_1 + n\omega_2 : m, n \in \mathbf{Z}\}$ wird Periodengitter genannt, und das Paar (ω_1, ω_2) von reduzierten Perioden bildet eine Basis des Gitters. Jedes Paar von Perioden, das eine Basis des Gitters bildet, nennen wir Basis-Perioden.

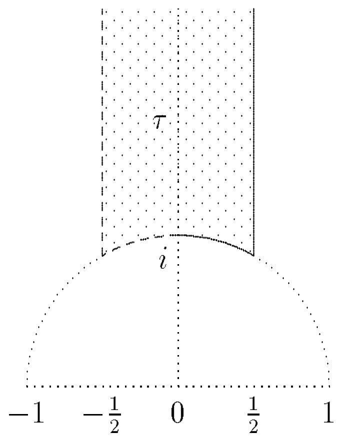
Satz 1.2:
Eine elliptische Funktion habe das Paar (ω_1, ω_2) als Basis-Perioden. Die Perioden ω_1 und ω_2 sind genau dann reduzierte Perioden der Funktion, wenn für $\tau = \omega_2/\omega_1$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$|\tau| \geq 1 \quad , \qquad \Im(\tau) > 0 \quad , \qquad -\frac{1}{2} \leq \Re(\tau) \leq \frac{1}{2} \quad . \tag{1.1}$$

Satz 1.3:
Zu jeder nicht konstanten elliptischen Funktion gibt es ein Paar von Basis-Perioden (ω_1, ω_2), so daß der Quotient $\tau = \omega_2/\omega_1$ den Bedingungen (1.1) genügt

$$\textit{und für} \quad |\tau| = 1 \quad \textit{zusätzlich} \quad \Re(\tau) \geq 0 \quad \textit{gilt.}$$

Der Bereich, aus dem τ gewählt werden kann, hat demnach folgende Gestalt:



Nun sei eine nicht konstante elliptische Funktion mit einem Paar reduzierter Perioden (ω_1, ω_2) gegeben. Das Parallelogramm mit den Ecken 0, ω_1, $\omega_1 + \omega_2$ und ω_2, zu dem nur der Eckpunkt 0 und die beiden von ihm ausgehenden Seiten ohne deren andere Eckpunkte gehören, bezeichnen wir als Periodenparallelogramm der elliptischen Funktion. Offenbar genügt es, elliptische Funktionen in ihrem Periodenparallelogramm zu betrachten.

1.3 Elementare Eigenschaften von elliptischen Funktionen

1. Außer den konstanten Funktionen gibt es keine holomorphen elliptischen Funktionen. Eine nicht konstante elliptische Funktion hat daher in jedem Periodenparallelogramm mindestens eine Polstelle.

2. Die Summe aller Residuen in einem Periodenparallelogramm einer elliptischen Funktion ist null.

3. Eine nicht konstante elliptische Funktion kann deshalb nicht einen einfachen Pol pro Periodenparallelogramm haben, sondern muß entweder mindestens zwei einfache Pole oder mindestens einen doppelten Pol besitzen.

4. Eine nicht konstante elliptische Funktion hat gleich viele Null- und Polstellen, wenn wir die Null- bzw. Polstellen mit ihren Multiplizitäten zählen.

5. Der Grad l einer elliptischen Funktion ist die Zahl ihrer Polstellen in einem Periodenparallelogramm, wobei jede Polstelle mit ihrer Multiplizität gezählt wird. Eine nicht konstante elliptische Funktion vom Grad l (beachte, daß $l \geq 2$ gilt) nimmt nun in einem Periodenparallelogramm jeden komplexen Wert genau l mal an, wenn wir die Multiplizitäten der Punkte beachten. Hieraus fogt insbesondere Eigenschaft 4.

6. Wenn $E(z)$ eine nicht konstante elliptische Funktion ist, dann sind auch $E'(z)$ und $E'(z)/E(z)$ elliptische Funktionen, und $E'(z)/E(z)$ hat an den Stellen, an denen $E(z)$

n-fache Nullstellen hat, einfache Polstellen mit Residuum $+n$ und an den Stellen, an denen $E(z)$ n-fache Polstellen hat, einfache Polstellen mit Residuum $-n$.

7. Die Summe der Polstellen subtrahiert von der Summe der Nullstellen einer nicht konstanten elliptischen Funktion ergibt eine Periode. Wobei die Null- bzw. Polstellen ihrer Multiplizität entsprechend oft addiert werden müssen.

8. Zu jeder Konstellation von Null- und Polstellen, die den Bedingungen 4 und 7 genügt, gibt es eine elliptische Funktion. Zwei solche elliptischen Funktionen unterscheiden sich nur durch einen konstanten Faktor.

Wegen Eigenschaft 3 haben die einfachsten nicht konstanten elliptischen Funktionen Abbildungsgrad 2. Es gibt nun zwei Typen elliptischer Funktionen vom Grad 2; zum einen Funktionen mit einer doppelten Polstelle mit Residuum null als einzige Singularität in ihrem Periodenparallelogramm, welche als Weierstraß-Funktionen bezeichnet werden, zum anderen Funktionen mit genau zwei einfachen Polstellen in jedem Periodenparallelogramm, wobei die Residuen der Pole betragsmäßig gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben; solche Funktionen werden Jacobi-Funktionen genannt.

1.4 Spezielle elliptische Funktionen

In diesem Abschnitt werden vier elliptische Funktionen konstruiert, die im Zusammenhang mit Minimalflächen auf Tori wichtig sind, eine Weierstraß-Funktion, im folgenden $\wp_g$ genannt[1], und drei Jacobi-Funktionen, hier mit $\mathcal{J}_D$, $\mathcal{J}_E$ und $\mathcal{J}_F$ bezeichnet. Zu diesem Zweck nehmen wir zwei nützliche Identifikationen vor: $\mathbf{T} = \mathbf{C}/\Gamma$ und $\mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$ mittels stereographischer Projektion. Nun kann man eine elliptische Funktion f als holomorphe Abbildung $f : \mathbf{T} \to \mathbf{S}^2$ von einem Torus auf die Sphäre auffassen.

Die Art und Weise, in der hier elliptische Funktionen beschrieben und dann im Verlauf dieser Arbeit benutzt werden, geht auf eine Idee von H. Karcher zurück. Sie wird ausführlich in [8, Chapter 3] erklärt.

1.4.1 Konstruktion elliptischer Funktionen

Um eine elliptische Funktion vom Grad 2 zu erhalten, betrachten wir den Torus wie oben als $\mathbf{C}/\Gamma$. Jede 180°-Drehung in $\mathbf{C}$ induziert eine orientierungserhaltende Involution mit vier Fixpunkten auf dem Torus. Diese vier Fixpunkte bilden in $\mathbf{C}$ ein Gitter mit der halben Periode des Gitters Γ. Wenn man den Torus nun mit den vier Parallelogrammen, die durch das Fixpunktgitter der 180°-Drehung entstehen, pflastert, dann setzt sich die Quotienten-Fläche $\mathbf{T}/D^{180}$ der Involution zusammen aus zwei parallelogrammförmigen Flächen, vier Kanten und vier Ecken, den vier Fixpunkten. Daraus folgt, daß die Eulercharakteristik der Quotienten-Fläche gleich zwei ist und es sich deshalb um eine Sphäre handelt. Wenn jetzt

[1] Die Funktion $\wp_g$ ist im Falle eines quadratischen Torus mit der bekannten $\wp$-Funktion von Weierstraß bis auf Skalierung identisch.

noch drei beliebige Punkte der Quotienten-Sphäre mit 0, 1 und ∞ bezeichnet werden, dann haben wir diese Sphäre mit der Riemannschen Zahlenkugel $\hat{\mathbf{C}}$ identifiziert. Auf Grund dieser Identifikation ist die Quotienten-Abbildung eine elliptische Funktion $f : \mathbf{T} \to \mathbf{S}^2$ vom Grad 2, deren Verzweigungspunkte die vier Fixpunkte der Involution sind. Je zwei dieser Funktionen mit den gleichen Verzweigungspunkten unterscheiden sich nur durch eine Möbiustransformation. Da bei allen so konstruierten elliptischen Funktionen vom Grad 2 die Verzweigungspunkte ein Gitter mit der halben Periode des Torusgitters Γ bilden, gilt insgesamt, daß sich je zwei elliptische Funktionen vom Grad 2, die auf demselben Torus definiert sind, nur durch eine Translation des Torus, die die Verzweigungspunkte aufeinander schiebt, und eine Möbiustransformation, die die Werte 0, 1 bzw. ∞ aufeinander abbildet, unterscheiden. Weil das Doppelverhältnis von vier komplexen Zahlen invariant unter Möbiustransformation ist, hängt das Doppelverhältnis der Werte der Verzweigungspunkte einer elliptischen Funktion vom Grad 2 nur von dem zugrunde liegenden Torus ab. Deshalb ist das Doppelverhältnis der Verzweigungswerte einer elliptischen Funktion vom Grad 2 eine Invariante des Torus, und zwar die sogenannte Modul-Invariante. Sie wird weiter unten (siehe 1.4.1 auf Seite 11) berechnet. Die Differentialgleichungen für unsere vier elliptischen Funktionen, die wir unten aufstellen (s. 1.4.2 S. 13), hängen nur von der Modul-Invariante des Torus ab.

Für ein Viertel-Periodengitter können wir vier verschiedene 180°-Drehungen angeben, deren Fixpunkte alle auf diesem Viertel-Gitter liegen. Außerdem stellt man fest, daß die vier Fixpunkte einer Rotation von den drei anderen Drehungen permutiert werden. Deshalb gibt es drei Torusrotationen, die die Verzweigungspunkte von f permutieren, und hierzu drei Möbiusinvolutionen, so daß für $f : \mathbf{T} \to \mathbf{S}^2$ gilt:

$$f \circ \text{Torusrotation}_k = \text{Möbiusinvolution}_k \circ f, \qquad \text{für} \quad k = 1,\, 2,\, 3.$$

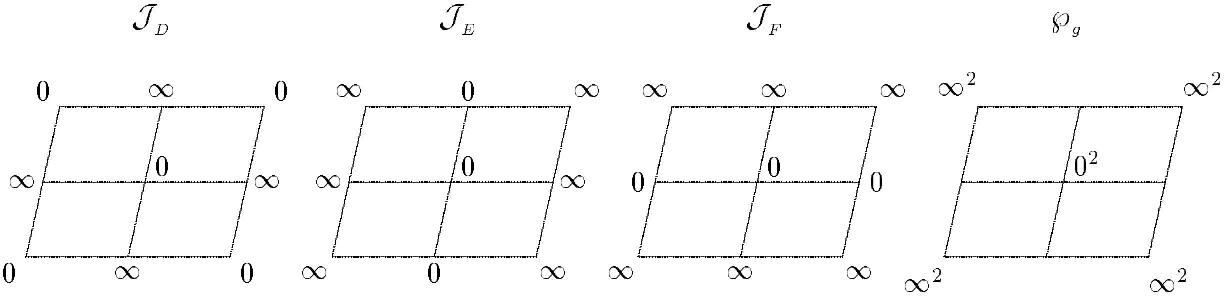
Wir wollen f so konstruieren, daß die Möbiusinvolutionen möglichst einfache Möbiustransformationen sind; z.B. $z \longmapsto z^{-1}$, $z \longmapsto -z^{-1}$ und $z \longmapsto -z$. Diese Möbiusinvolutionen entsprechen jeweils einer 180°-Drehung um eine der drei Koordinatenachsen im $\mathbf{R}^3$, wenn man sich $\mathbf{S}^2$ in der üblichen Weise in $\mathbf{R}^3$ eingebettet denkt.

Nun wollen wir mit der eigentlichen Konstruktion der erwähnten vier elliptischen Funktionen $\mathcal{J}_D$, $\mathcal{J}_E$, $\mathcal{J}_F$ und $\wp_g$ beginnen. Zuerst wählen wir das Periodenparallelogramm des Torus so, daß sein Mittelpunkt im Punkt $0 \in \mathbf{C}$ liegt; diesen Punkt bezeichnen wir auch mit $0 \in \mathbf{T}$. Als nächstes geben wir die Lage der Verzweigungspunkte, die Null- und Polstellen und einen zusätzlichen endlichen Wert, hier 1 bzw. i, auf dem Torus vor. Die Werte werden an den Stellen, an denen sie angenommen werden, in den Torus geschrieben.

Nach Aussage 8 aus Abschnitt 1.3 können die Null- und Polstellen der Funktionen so gelegt werden, wie sie in der unten folgenden Skizze eingezeichnet sind.

Durch diese Lage der Null- und Polstellen ergibt sich der Vorteil, daß durch Multiplikation der Funktionen leicht neue elliptische Funktionen hergestellt werden können. Es gilt z.B. $\mathcal{J}_E \cdot \mathcal{J}_F = c \cdot \wp_g$ mit einer Konstanten $c \in \mathbf{C}$, weil die elliptischen Funktionen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die gleichen Null- und Polstellen haben.

Wenn wir die Lage der Null- bzw. Polstellen unserer zu konstruierenden elliptischen Funktionen vom Grad 2 aus dem eben genannten Grund von vornherein auf die Ecke, die

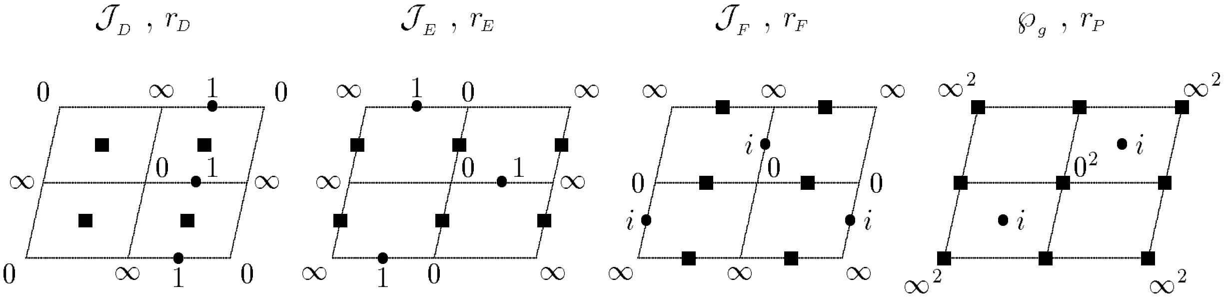


Kantenmitten und die Mitte des Torus einschränken und zusätzlich noch verlangen, daß in der Mitte des Torus eine Nullstelle liegen soll, dann gibt es bis auf Multiplikation mit komplexen Konstanten nur die vier oben skizzierten Funktionen.

Auf Grund der Definition elliptischer Funktionen vom Grad 2 als Quotientenabbildungen sind die Werte der Funktionen auf dem Torus bzgl. 180°-Rotation um ihre Verzweigungspunkte invariant. Dies bedeutet, daß die Verzweigungspunkte der Jacobi-Funktionen in der Mitte zwischen jeweils zwei Polstellen bzw. zwischen je zwei Nullstellen liegen. Bei der Weierstraß-Funktion liegt natürlich an der doppelten Nullstelle und an dem zweifachen Pol jeweils ein Verzweigungspunkt vor. Die beiden anderen Verzweigungspunkte müssen das Halb-Periodengitter ergänzen und liegen deshalb an den Seitenmitten des Periodenparallelogramms.

Einen Punkt mit dem Wert 1 (bzw. i) legen wir zwischen eine Null- und eine Polstelle, da bei 180°-Drehung um 1 (bzw. i) die Werte 0 und ∞ auf der Riemannschen Zahlenkugel vertauscht werden. Der zweite Punkt mit dem gleichen Wert ergibt sich wieder durch die Symmetrie auf Grund der Verzweigungspunkte.

Die Torusrotationen, durch die die jeweiligen Quotientenabbildungen induziert werden, bezeichnen wir mit r_D, r_E, r_F und r_P. Fixpunkte dieser Rotationen sind die Verzweigungspunkte, und es gilt natürlich $f \circ r_* = f$. Mit dem Symbol ■ sind die Verzweigungspunkte markiert. Damit erhält man folgende Skizzen:



Man beachte, daß jede der vier 180°-Rotationen r_* die Fixpunkte der anderen Drehungen permutiert. Wenn wir nun jeweils um die Punkte mit den Werten 1 (bzw. i) drehen, dann erhalten wir folgendes Ergebnis, das man aus den obigen Bildern ablesen kann:

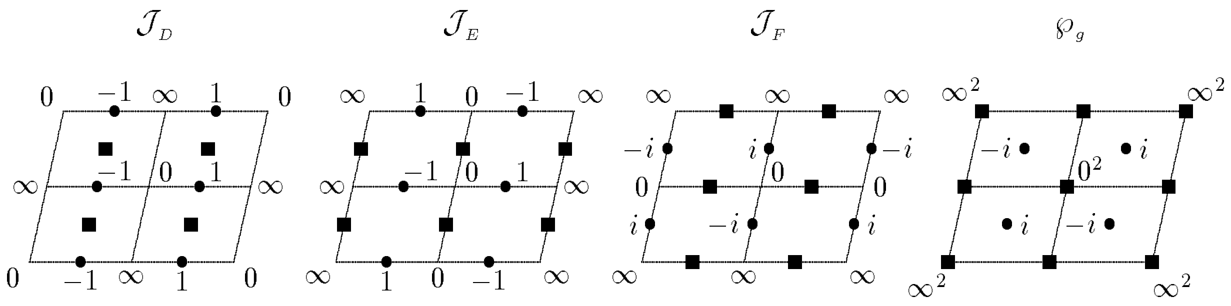
$$\mathcal{J}_D \circ r_F = \frac{1}{\mathcal{J}_D} \quad , \qquad \text{an den Fixpunkten von } r_F \text{ hat } \mathcal{J}_D \text{ die Werte } \pm 1 \; .$$

$$\mathcal{J}_E \circ r_F = \frac{1}{\mathcal{J}_E} \quad , \qquad \text{an den Fixpunkten von } r_F \text{ hat } \mathcal{J}_E \text{ die Werte } \pm 1 \; .$$

$$\mathcal{J}_F \circ r_E = -\frac{1}{\mathcal{J}_F} \quad , \qquad \text{an den Fixpunkten von } r_E \text{ hat } \mathcal{J}_F \text{ die Werte } \pm i \; .$$

$$\wp_g \circ r_D = -\frac{1}{\wp_g} \quad , \qquad \text{an den Fixpunkten von } r_D \text{ hat } \wp_g \text{ die Werte } \pm i \; .$$

Somit ergeben sich nun die Skizzen:



Aus diesen Zeichnungen kann man ablesen, daß die Jacobi-Funktionen ungerade Funktionen sind; $\wp_g$ ist natürlich gerade:

$$\mathcal{J}_* \circ r_P = -\mathcal{J}_* \quad \text{und} \quad \wp_g \circ r_P = \wp_g \quad .$$

Außerdem ergibt sich noch für die Jacobi-Funktionen:

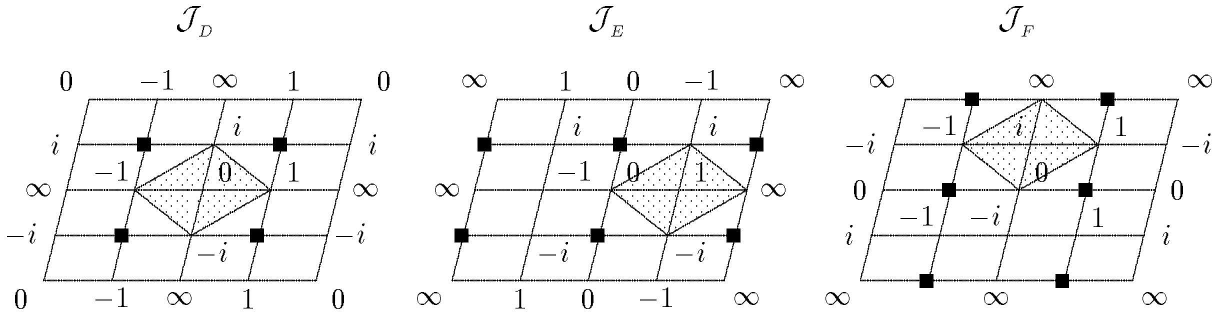
$$\mathcal{J}_D \circ r_E = -\frac{1}{\mathcal{J}_D} \quad , \qquad \text{an den Fixpunkten von } r_E \text{ hat } \mathcal{J}_D \text{ die Werte } \pm i \; .$$

$$\mathcal{J}_E \circ r_D = -\frac{1}{\mathcal{J}_E} \quad , \qquad \text{an den Fixpunkten von } r_D \text{ hat } \mathcal{J}_E \text{ die Werte } \pm i \; .$$

$$\mathcal{J}_F \circ r_D = \frac{1}{\mathcal{J}_F} \quad , \qquad \text{an den Fixpunkten von } r_D \text{ hat } \mathcal{J}_F \text{ die Werte } \pm 1 \; .$$

Damit haben wir für die Jacobi-Funktionen die zu den drei einfachsten Möbiusinvolutionen gehörenden Torusrotationen gefunden.

Jetzt müssen noch die Vorzeichen der zuletzt hergeleiteten Werte der Jacobi-Funktionen bestimmt werden. Im Fall von $\mathcal{J}_D$ wird das unten schattiert gezeichnete Parallelogramm biholomorph auf eine Umgebung von $0 \in \mathbf{C}$ abgebildet. Der Rand dieser Umgebung enthält die Punkte 1, i, -1 und $-i$ in der üblichen Reihenfolge. Deshalb sind auch die Werte um den Mittelpunkt des Torus in dieser Reihenfolge angeordnet. Bei den anderen beiden Jacobi-Funktionen verfahren wir analog, um die Vorzeichen der zuletzt hergeleiteten Werte zu bestimmen. Damit ergeben sich die drei folgenden Bilder:



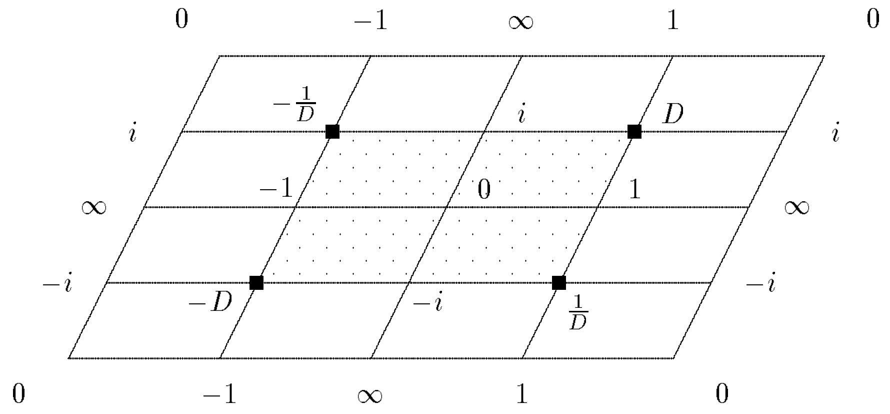
Wie wir schon oben (s. S. 5) festgestellt haben, hängt das Doppelverhältnis der Verzweigungswerte nur von dem Torus, auf dem die elliptischen Funktionen definiert sind, ab. Deshalb nennen wir jeweils einen Verzweigungswert der Jacobi-Funktionen D, E bzw. F. Dieser Wert hängt jetzt von dem zugrunde liegenden Torus ab. Die anderen Verzweigungswerte ergeben sich durch die drei Torusrotationen und die zugehörigen Möbiusinvolutionen; der Verzweigungswert B geht nämlich bei Drehung um 0 oder ∞ nach $-B$, bei Rotation um ± 1 nach $1/B$ und bei Drehung um $\pm i$ nach $-1/B$ über. Damit ergeben sich die drei Bilder auf der nächsten Seite.

Die Unterparallelogramme des Periodenparallelogramms, die in der oberen rechten Ecke den zuerst benannten Verzweigungspunkt haben, sind in den Skizzen schattiert dargestellt. Wenn wir die Funktionen so translieren, daß die schattierten Flächen und damit auch die Verzweigungspunkte übereinstimmen, dann dürfen sich die durch diese Translationen entstandenen $\tilde{\mathcal{J}}_*$ nur durch Möbiustransformationen voneinander unterscheiden.

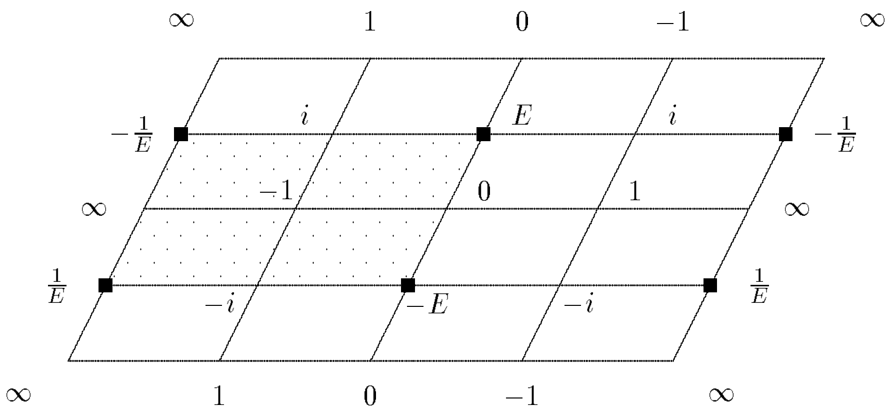
Die Möbiustransformation zwischen $\mathcal{J}_D$ und $\mathcal{J}_E$ muß nun folgende Eigenschaften haben, die man aus den Zeichnungen ablesen kann:

$$
\begin{array}{llll}
1 \longmapsto 0 \;; & 0 \longmapsto -1 \;; & \infty \longmapsto 1 \;; & \\[1ex]
-1 \longmapsto \infty \;; & i \longmapsto i \;; & -i \longmapsto -i \;; & \\[1ex]
D \longmapsto E \;; & \dfrac{1}{D} \longmapsto -E \;; & -\dfrac{1}{D} \longmapsto -\dfrac{1}{E} \;; & -D \longmapsto \dfrac{1}{E} \;.
\end{array}
$$

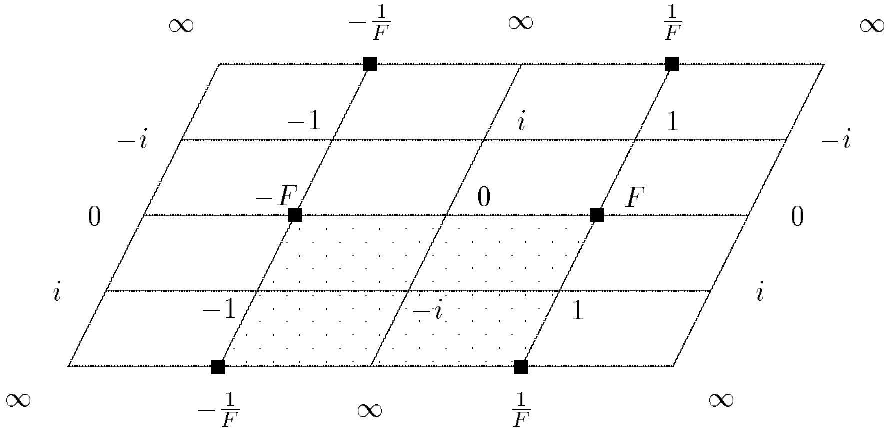
$\mathcal{J}_D$



$\mathcal{J}_E$



$\mathcal{J}_F$



Aus den ersten drei Bedingungen ergibt sich die Möbiustransformation:

$$z \longmapsto \frac{z-1}{z+1} \quad .$$

Die nächsten drei Eigenschaften werden von dieser Möbiustransformation automatisch auch erfüllt, wie man leicht nachrechnen kann. Aus den letzten vier Bedingungen leitet sich aber eine zusätzliche Forderung an D und E ab:

$$E = \frac{D-1}{D+1} \quad . \tag{1.2}$$

Auf die gleiche Art und Weise ergeben sich zehn Eigenschaften für eine Möbiustransformation zwischen $\mathcal{J}_D$ und $\mathcal{J}_F$:

$$\begin{array}{llll} i \longmapsto 0 \ ; & 0 \longmapsto -i \ ; & -i \longmapsto \infty \ ; & \\ 1 \longmapsto 1 \ ; & -1 \longmapsto -1 \ ; & \infty \longmapsto i \ ; & \\ D \longmapsto F \ ; & \dfrac{1}{D} \longmapsto \dfrac{1}{F} \ ; & -\dfrac{1}{D} \longmapsto -F \ ; & -D \longmapsto -\dfrac{1}{F} \quad . \end{array}$$

Wieder ergibt sich aus den ersten drei Bedingungen eine Möbiustransformation:

$$z \longmapsto \frac{z-i}{-iz+1} \quad .$$

Wie oben erfüllt diese Möbiustransformation die ersten sechs Bedingungen, und genauso ergibt sich auch die Beziehung zwischen D und F:

$$F = \frac{D-i}{1-iD} = \frac{1+iD}{i+D} \quad . \tag{1.3}$$

Oben hatten wir schon bemerkt, daß $\mathcal{J}_E \cdot \mathcal{J}_F = c \cdot \wp_g$ mit einer Konstanten $c \in \mathbf{C}$ gilt, weil die Null- und Polstellen beider Funktionen übereinstimmen. Nun sehen wir auch noch an den obigen Bildern, daß die beiden Funktionen an den i-Stellen übereinstimmen, woraus folgt:

$$\mathcal{J}_E \cdot \mathcal{J}_F = \wp_g \quad .$$

Hieraus kann man nun die folgenden Relationen und die neu auf dem Torus eingetragenen Werte berechnen (siehe große Skizze von $\wp_g$ auf der nächsten Seite). Die Möbiustransformation zwischen $\mathcal{J}_D$ und $\wp_g$ muß den folgenden Bedingungen genügen:

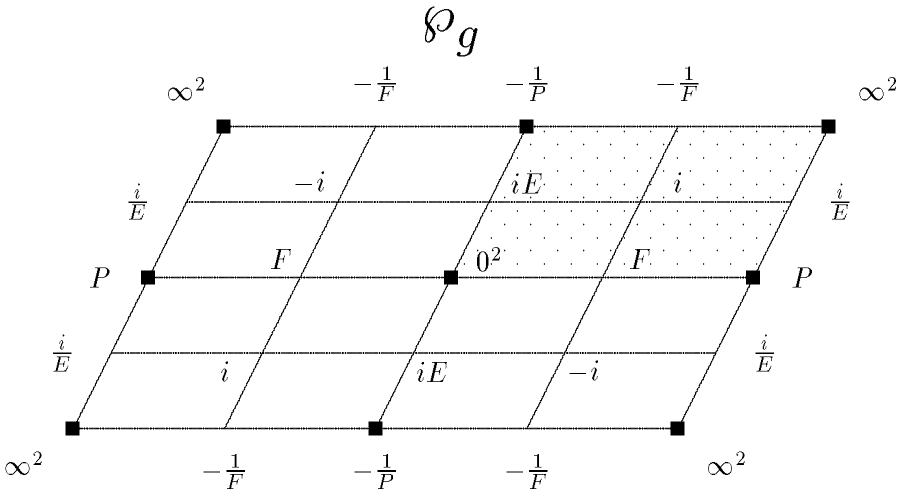
$$\begin{array}{llll} 0 \longmapsto -i \ ; & \infty \longmapsto i \ ; & 1 \longmapsto \dfrac{i}{E} \ ; & \\ i \longmapsto F \ ; & -i \longmapsto -\dfrac{1}{F} \ ; & -1 \longmapsto iE \ ; & \\ D \longmapsto P \ ; & \dfrac{1}{D} \longmapsto \infty \ ; & -\dfrac{1}{D} \longmapsto 0 \ ; & -D \longmapsto -\dfrac{1}{P} \quad . \end{array}$$

Entsprechend berechnet man die Möbiustransformation:

$$z \longmapsto i \cdot \frac{Dz+1}{Dz-1} \quad .$$

Analog erhalten wir folgenden Zusammenhang zwischen D und P:

$$P = i \cdot \frac{D^2+1}{D^2-1} \quad \Longleftrightarrow \quad D^2 = \frac{P+i}{P-i} \quad . \tag{1.4}$$



Nun berechnen wir noch das Doppelverhältnis der Verzweigungswerte, die sogenannte Modul-Invariante:

$$\left(\frac{D^2+1}{D^2-1}\right)^2 = \frac{\left(E+\frac{1}{E}\right)^2}{4} = \frac{-4}{\left(F-\frac{1}{F}\right)^2} = -P^2 \quad .$$

In diesem Kapitel wurden die vier elliptischen Funktionen $\mathcal{J}_D$, $\mathcal{J}_E$, $\mathcal{J}_F$ und $\wp_g$ so konstruiert, daß die Null- und Polstellen der vier Funktionen an den gleichen Stellen liegen, damit sich diese Funktionen bequem multiplizieren lassen. Dies macht sich vor allem im nächsten Unterabschnitt vorteilhaft bemerkbar. Bei der Konstruktion und Berechnung der Minimalflächen in Kapitel 3 ist es aber angenehmer, wenn die Funktionen so transliert sind, daß alle Verzweigungspunkte so liegen, wie momentan die von $\mathcal{J}_D$. Die so translierten Funktionen werden in Kapitel 3 aber trotzdem einfach mit f anstatt mit $\tilde{f}$ bezeichnet.

1.4.2 Funktionalgleichungen zwischen den vier Funktionen

Üblicherweise wird eine Riemannsche Fläche durch zwei Funktionen, die auf ihr definiert sind, und deren algebraische Beziehung zueinander beschrieben. Man kann die Funktionen außerhalb ihrer Verzweigungspunkte als lokale Koordinaten und die algebraische Relation als Koordinatenwechsel auffassen. Mit Hilfe der obigen Skizzen können wir nun zwischen je zwei der vier elliptischen Funktionen solche Relationen angeben, indem wir die Null- und Polstellen und einen zusätzlichen Punkt mit endlichem Wert vergleichen. Als Vergleichspunkte mit endlichem Wert eignen sich am besten die Verzweigungspunkte der Funktionen auf der jeweils linken Seite jeder Gleichung.

$$\mathcal{J}_D - \frac{1}{\mathcal{J}_D} = \frac{D - \frac{1}{D}}{2i} \cdot \left(\mathcal{J}_E - \frac{1}{\mathcal{J}_E}\right) = \frac{2i}{E - \frac{1}{E}} \cdot \left(\mathcal{J}_E - \frac{1}{\mathcal{J}_E}\right) \quad , \tag{1.5}$$

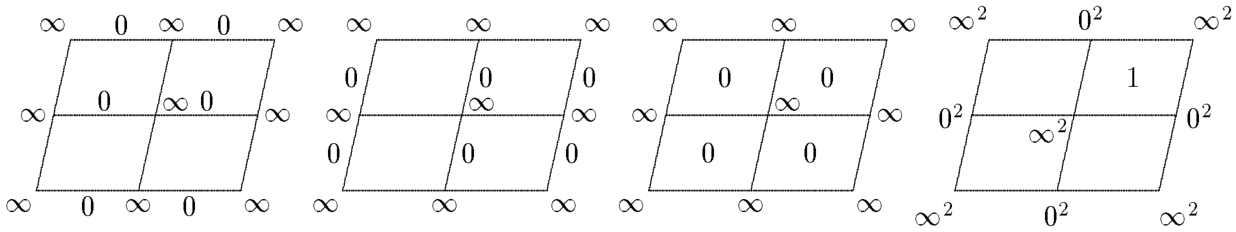
$$\mathcal{J}_D + \frac{1}{\mathcal{J}_D} = \frac{D + \frac{1}{D}}{2} \cdot \left(\mathcal{J}_F + \frac{1}{\mathcal{J}_F}\right) = \frac{2}{F + \frac{1}{F}} \cdot \left(\mathcal{J}_F + \frac{1}{\mathcal{J}_F}\right) \quad , \tag{1.6}$$

$$\mathcal{J}_E + \frac{1}{\mathcal{J}_E} = \frac{E + \frac{1}{E}}{2i} \cdot \left(\mathcal{J}_F - \frac{1}{\mathcal{J}_F}\right) = \frac{2}{F - \frac{1}{F}} \cdot \left(\mathcal{J}_F - \frac{1}{\mathcal{J}_F}\right) \quad , \tag{1.7}$$

$$\frac{D^2}{\mathcal{J}_D^{\,2}} = D^2 \cdot \frac{\wp_g - \frac{1}{\wp_g} - P + \frac{1}{P}}{F - \frac{1}{F} - P + \frac{1}{P}} = \frac{\wp_g - \frac{1}{\wp_g} - P + \frac{1}{P}}{2i - P + \frac{1}{P}} \quad . \tag{1.8}$$

Die Null- und Polstellenverteilung zu den obigen Gleichungen sieht so aus:

(1.5) (1.6) (1.7) (1.8)



Ein anderes gebräuchliches Paar von Funktionen auf einem Torus zur Beschreibung desselben besteht aus der logarithmischen Ableitung f'/f einer elliptischen Funktion und einer weiteren Funktion des Torus. Hierzu sei bemerkt, daß $\mathcal{J}_*'/\mathcal{J}_*$ an den Verzweigungspunkten von $\mathcal{J}_*$ einfache Nullstellen und an den Null- und Polstellen von $\mathcal{J}_*$ einfache Pole hat. $\wp_g'/\wp_g$ hat an der Null- und an der Polstelle von $\wp_g$ je einen einfachen Pol und an den beiden Verzweigungspunkten mit endlichem Wert je eine einfache Nullstelle. $\wp_g'/\wp_g$ ist also auch eine elliptische Funktion vom Grad 2, während $\mathcal{J}_*'/\mathcal{J}_*$ Abbildungsgrad 4 hat.

Die nächsten drei Gleichungen ergeben sich, indem man wie oben auch schon die Null- und Polstellen der Funktionen vergleicht und dann die Konstanten durch Differenzieren bestimmt.

$$\frac{\mathcal{J}_D'}{\mathcal{J}_D} = \mathcal{J}_E'(0) \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{J}_E} + \mathcal{J}_E\right) = \mathcal{J}_F'(0) \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{J}_F} - \mathcal{J}_F\right) \quad , \tag{1.9}$$

$$\frac{\mathcal{J}_E'}{\mathcal{J}_E} = \mathcal{J}_D'(0) \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{J}_D} + \mathcal{J}_D\right) = \mathcal{J}_D'(0) \cdot \frac{2}{\frac{1}{F} + F} \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{J}_F} + \mathcal{J}_F\right) \quad , \tag{1.10}$$

$$\frac{\mathcal{J}_F'}{\mathcal{J}_F} = \mathcal{J}_D'(0) \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{J}_D} - \mathcal{J}_D\right) = \mathcal{J}_D'(0) \cdot \frac{-2i}{\frac{1}{E} - E} \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{J}_E} - \mathcal{J}_E\right) \quad . \tag{1.11}$$

Die erste Konstante $c \in \mathbf{C}$ wird jetzt beispielhaft bestimmt, die anderen Konstanten erhält man analog.

$$\begin{array}{rrcl}
 & \frac{\mathcal{J}_D{}'}{\mathcal{J}_D} & = & c \cdot \left(\frac{1}{\mathcal{J}_E} + \mathcal{J}_E\right) \\
\Longleftrightarrow & \mathcal{J}_D{}'\mathcal{J}_E & = & c \cdot \left(\mathcal{J}_D + \mathcal{J}_D\mathcal{J}_E{}^2\right) \\
\Longrightarrow & \mathcal{J}_D{}''\mathcal{J}_E + \mathcal{J}_D{}'\mathcal{J}_E{}' & = & c \cdot \left(\mathcal{J}_D{}' + 2\mathcal{J}_D\mathcal{J}_E\mathcal{J}_E{}' + \mathcal{J}_D{}'\mathcal{J}_E{}^2\right) \\
\Longrightarrow & \mathcal{J}_D{}'(0) \cdot \mathcal{J}_E{}'(0) & = & c \cdot \mathcal{J}_D{}'(0) \\
\Longleftrightarrow & c & = & \mathcal{J}_E{}'(0) \quad .
\end{array}$$

q.e.d.

Aus (1.9) und (1.10) ergibt sich auch eine Gleichung für die logarithmische Ableitung $\wp_g{}'/\wp_g$:

$$\frac{\wp_g{}'}{\wp_g} = \frac{\mathcal{J}_E{}'}{\mathcal{J}_E} + \frac{\mathcal{J}_F{}'}{\mathcal{J}_F} = \mathcal{J}_D{}'(0) \cdot \frac{2}{\mathcal{J}_D} \quad . \tag{1.12}$$

Für $\wp_g + 1/\wp_g$ gilt:

$$\left(\frac{1}{\mathcal{J}_D}\right)' = -\frac{\mathcal{J}_D{}'}{\mathcal{J}_D{}^2} = -\frac{\wp_g{}''(0)}{2\mathcal{J}_D{}'(0)} \cdot \left(\wp_g + \frac{1}{\wp_g}\right) \quad . \tag{1.13}$$

Auch hier stimmen die Null- und Polstellen der Funktionen überein und die Konstante auf der rechten Seite der Gleichung bekommt man durch die nächste Rechnung.

$$\begin{array}{rcl}
-\frac{\mathcal{J}_D{}'}{\mathcal{J}_D{}^2} & = & c \cdot \left(\wp_g + \frac{1}{\wp_g}\right) \\
-\wp_g\mathcal{J}_D{}' & = & c \cdot \mathcal{J}_D{}^2\left(\wp_g{}^2 + 1\right) \\
-\left(\wp_g\mathcal{J}_D{}'' + \wp_g{}'\mathcal{J}_D{}'\right) & = & c \cdot 2\left(\mathcal{J}_D\mathcal{J}_D{}'\left(\wp_g{}^2 + 1\right) + \mathcal{J}_D{}^2\wp_g\wp_g{}'\right) \\
-\left(\wp_g\mathcal{J}_D{}''' + 2\wp_g{}'\mathcal{J}_D{}'' + \wp_g{}''\mathcal{J}_D{}'\right) & = &
\end{array}$$

$$= c \cdot 2\left(\left(\wp_g{}^2 + 1\right)\left((\mathcal{J}_D{}')^2 + \mathcal{J}_D\mathcal{J}_D{}''\right) + 4\wp_g\wp_g{}'\mathcal{J}_D\mathcal{J}_D{}' + \mathcal{J}_D{}^2\left(\left(\wp_g{}'\right)^2 + \wp_g\wp_g{}''\right)\right)$$

$$\begin{array}{rcl}
-\wp_g{}''(0) \cdot \mathcal{J}_D{}'(0) & = & c \cdot 2\,(\mathcal{J}_D{}')^2 \\
c & = & -\frac{\wp_g{}''(0)}{2 \cdot \mathcal{J}_D{}'(0)} \quad .
\end{array}$$

q.e.d.

Jetzt stellen wir noch je eine Differentialgleichung für unsere vier elliptischen Funktionen auf, indem wir eine Beziehung zwischen der logarithmischen Ableitung und der Funktion selbst angeben:

$$\left(\frac{\mathcal{J}_D{}'}{\mathcal{J}_D}\right)^2 = \mathcal{J}_D{}'(0)^2 \cdot \left(\mathcal{J}_D{}^2 + \frac{1}{\mathcal{J}_D{}^2} - D^2 - \frac{1}{D^2}\right) \quad , \tag{1.14}$$

$$\left(\frac{\mathcal{J}_E'}{\mathcal{J}_E}\right)^2 = \mathcal{J}_E'(0)^2 \cdot \left(\mathcal{J}_E^{\,2} + \frac{1}{\mathcal{J}_E^{\,2}} - E^2 - \frac{1}{E^2}\right) \quad , \tag{1.15}$$

$$\left(\frac{\mathcal{J}_F'}{\mathcal{J}_F}\right)^2 = \mathcal{J}_F'(0)^2 \cdot \left(\mathcal{J}_F^{\,2} + \frac{1}{\mathcal{J}_F^{\,2}} - F^2 - \frac{1}{F^2}\right) \quad , \tag{1.16}$$

$$\left(\frac{\wp_g'}{\wp_g}\right)^2 = -2\wp_g''(0) \cdot \left(\wp_g - \frac{1}{\wp_g} - P + \frac{1}{P}\right) \quad . \tag{1.17}$$

Wieder vergleicht man Null- und Polstellen und bestimmt die Konstanten so, wie unten für die erste und letzte Gleichung gezeigt wird.

$$\begin{aligned}
& & \left(\frac{\mathcal{J}_D'}{\mathcal{J}_D}\right)^2 &= c \cdot \left(\mathcal{J}_D^{\,2} + \frac{1}{\mathcal{J}_D^{\,2}} - D^2 - \frac{1}{D^2}\right) \\
&\Longleftrightarrow & (\mathcal{J}_D')^2 &= c \cdot \left(\mathcal{J}_D^{\,4} + 1 - \left(D^2 + \frac{1}{D^2}\right)\mathcal{J}_D^{\,2}\right) \\
&\Longrightarrow & c &= \mathcal{J}_D'(0)^2 \quad . & \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& & \left(\frac{\wp_g'}{\wp_g}\right)^2 &= c \cdot \left(\wp_g - \frac{1}{\wp_g} - P + \frac{1}{P}\right) \\
&\Longleftrightarrow & \left(\wp_g'\right)^2 &= c \cdot \left(\wp_g^{\,3} - \wp_g + \left(\frac{1}{P} - P\right)\wp_g^{\,2}\right) \\
&\Longrightarrow & 2\wp_g'\wp_g'' &= c \cdot \left(3\wp_g^{\,2}\wp_g' - \wp_g' + 2\left(\frac{1}{P} - P\right)\wp_g\wp_g'\right) \\
&\Longleftrightarrow & 2\wp_g'' &= c \cdot \left(3\wp_g^{\,2} - 1 + 2\left(\frac{1}{P} - P\right)\wp_g\right) \\
&\Longrightarrow & c &= -2\wp_g''(0) \quad . & \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

Als Konstanten in den obigen Gleichungen kommen Ausdrücke von $\mathcal{J}_*'(0)$ und $\wp_g''(0)$ vor. Die Terme $\mathcal{J}_*'(0)$ und $\wp_g''(0)$ selbst sind aber noch nicht bestimmt. Nun kann man alle Terme durch $\mathcal{J}_D'(0)$ ausdrücken, wie unten gezeigt wird.

$$\mathcal{J}_E'(0) = \frac{D - \frac{1}{D}}{2i} \cdot \mathcal{J}_D'(0) = \frac{2i}{E - \frac{1}{E}} \cdot \mathcal{J}_D'(0) \quad , \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_F'(0) &= \frac{D + \frac{1}{D}}{2} \cdot \mathcal{J}_D'(0) = \frac{2}{F + \frac{1}{F}} \cdot \mathcal{J}_D'(0) \\
&= \frac{E + \frac{1}{E}}{-2i} \cdot \mathcal{J}_E'(0) = \frac{-2}{F - \frac{1}{F}} \cdot \mathcal{J}_E'(0) \quad ,
\end{aligned} \tag{1.19}$$

$$\wp_g''(0) = \frac{-2}{D^2\left(2i - P + \frac{1}{P}\right)} \cdot (\mathcal{J}_D'(0))^2 = \frac{2}{P + \frac{1}{P}} \cdot (\mathcal{J}_D'(0))^2 \quad . \tag{1.20}$$

Die Beziehungen zwischen den einzelnen Termen erhält man durch Differenzieren der Gleichungen (1.5) bis (1.8). Das erste Gleichheitszeichen ergibt sich aus der folgenden Rechnung, und die anderen Relationen kann man ebenso leicht verifizieren.

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_D - \frac{1}{\mathcal{J}_D} &= \frac{D-\frac{1}{D}}{2i} \cdot \left(\mathcal{J}_E - \frac{1}{\mathcal{J}_E}\right) \\
\mathcal{J}_E {\mathcal{J}_D}^2 - \mathcal{J}_E &= \frac{D-\frac{1}{D}}{2i} \cdot \left(\mathcal{J}_D {\mathcal{J}_E}^2 - \mathcal{J}_D\right) \\
{\mathcal{J}_D}^2 \cdot {\mathcal{J}_E}' + 2 \cdot \mathcal{J}_E \mathcal{J}_D {\mathcal{J}_D}' - {\mathcal{J}_E}' &= \frac{D-\frac{1}{D}}{2i} \cdot \left({\mathcal{J}_E}^2 \cdot {\mathcal{J}_D}' + 2 \cdot \mathcal{J}_D \mathcal{J}_E {\mathcal{J}_E}' - {\mathcal{J}_D}'\right) \\
{\mathcal{J}_E}'(0) &= \frac{D-\frac{1}{D}}{2i} \cdot {\mathcal{J}_D}'(0) \quad . \qquad \text{q.e.d.}
\end{aligned}$$

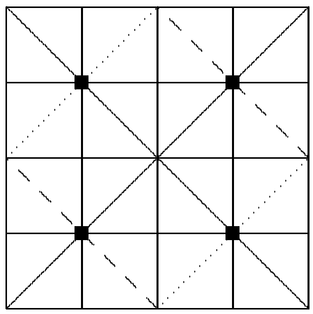
${\mathcal{J}_D}'(0)$ und damit die anderen Terme hängen von der Größe und der Lage des Periodenparallelogramms in $\mathbf{C}$ ab. Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, daß es sinnvoll ist, ${\mathcal{J}_D}'(0) = 1$ zu wählen. Damit sind dann auch alle anderen Terme und die obigen Konstanten festgelegt.

1.4.3 Symmetrische Tori

In diesem Abschnitt betrachten wir Tori mit Spiegelsymmetrien an Linien. Solche Tori werden auch Tori mit komplexer Konjugation genannt. Damit eine Spiegelsymmetrie überhaupt möglich ist, muß das Periodenparallelogramm der elliptischen Funktion rechteckig oder rhombisch sein. Bei rechteckigen Tori ist dann die Spiegelachse in $\mathbf{C}$ parallel zu den Kanten des Fundamentalrechtecks, und die Menge der Fixpunktstellen auf dem Torus besteht aus zwei Komponenten. Bei rhombischen Tori ist die Reflexionsgerade in $\mathbf{C}$ parallel zu den Diagonalen des Fundamentalrhombus, und die Menge der Fixpunktstellen ist zusammenhängend.

Zu einer vorgegebenen elliptischen Funktion vom Grad 2 auf einem rechteckigen Torus sind nur vier Reflexionen möglich, so daß die Verzweigungspunkte der Funktion permutiert werden. Die senkrechten bzw. waagerechten Spiegelachsen müssen entweder durch die Verzweigungspunkte oder durch die Mittelpunkte zwischen ihnen gehen. Auf einem rhombischen Torus sind ebenfalls vier verschiedene Reflexionen denkbar; und zwar können die beiden Diagonalen des Rhombus Spiegelachsen sein oder die Linien, die parallel zu den Diagonalen sind und durch je zwei Verzweigungspunkte laufen. Bei einem quadratischen Torus können alle acht Spiegelungen auftreten.

Im nebenstehenden Bild ist ein quadratischer Torus zu sehen, auf dem alle eingezeichneten Geraden Spiegellinien sind. Es sind jeweils vier horizontale und vier vertikale Linien zu sehen, weil jede der zwei Achsen ja aus zwei Komponenten besteht. Die gepunkteten und die gestrichelten Linien bestehen in der Skizze zwar aus zwei Segmenten, sie sind aber auf dem Torus jeweils zusammenhängende Linien. Die Verzweigungspunkte sind wie üblich markiert.



Es gilt auch hier auf Grund der Konstruktion der elliptischen Funktionen vom Grad 2 als Quotientenabbildungen:

$$f \circ \text{Torusreflexion} = \text{Möbiusreflexion} \circ f.$$

Wobei eine Möbiusreflexion eine Möbiusinvolution ist, die einen Kreis in $\mathbf{S}^2$ als Fixpunktmenge hat. Eine Möbiusreflexion können wir uns vorstellen als eine Hintereinanderschaltung einer Möbiustransformation, die die Linie, an der gespiegelt wird, auf den Großkreis in $\mathbf{S}^2$ dreht, der der reellen Achse entspricht, gefolgt von der komplexen Konjugation, mittels der an der reellen Achse gespiegelt wird, und der Inversen der Möbiustransformation, die die Spiegellinie wieder in ihre ursprüngliche Lage zurückdreht.

Nun kann man sich die Skizzen der vier elliptischen Funktionen ansehen und feststellen, welche Werte bei einer bestimmten Torusreflexion vertauscht werden. Hieraus ergeben sich dann Bedingungen, aus denen man die zugehörige Möbiusreflexion berechnen kann. Aus dieser können nun wiederum Rückschlüsse auf weitere bzw. spezielle Werte der Funktion gezogen werden.

Dies wird nun am Beispiel von $\mathcal{J}_D$ kurz erläutert. Hierzu betrachte man die horizontalen Spiegelachsen auf dem Torus, die durch die Punkte mit den Werten 0, 1, ∞ und -1 gehen. Diese vier Punkte werden auf sich selbst abgebildet, und die Werte i und $-i$ werden vertauscht. Hieraus ergibt sich als Möbiusreflexion $z \longmapsto \bar{z}$. Diese Möbiusreflexion hat die reelle Achse als Fixpunktmenge, d. h. unsere Spiegelachsen werden auf $\mathbf{R} \subset \hat{\mathbf{C}}$ abgebildet. Dies ist der Grund dafür, daß wir nun

$$\mathcal{J}_D{}'(0) = 1$$

wählen. Auf die gleiche Art und Weise erkennt man, daß die senkrechten Spiegelachsen durch die Punkte mit den Werten 0, i, ∞ und $-i$ auf $i\mathbf{R} \subset \hat{\mathbf{C}}$ und die Spiegelachsen, die durch die Verzweigungspunkte gehen, nach $\mathbf{S}^1 \subset \hat{\mathbf{C}}$ abgebildet werden. Es gilt also insbesondere $D = e^{i\alpha}$ mit $0 < \alpha < \pi/2$. Ganz analog sieht man, daß $D = e^{i\frac{\pi}{4}}$ für quadratische und $D = R \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$ mit $R \in \mathbf{R}^+$ für rhombische Tori gilt.

Zusammenfassend kann man sagen, daß auf rechteckigen Tori die möglichen Spiegelachsen der vier elliptischen Funktionen entweder ganz nach $\mathbf{R}$, $i\mathbf{R}$ oder $\mathbf{S}^1 \subset \hat{\mathbf{C}}$ abgebildet werden, weil sich für sie als Möbiusreflexionen $z \longmapsto \bar{z}$, $z \longmapsto -\bar{z}$ bzw. $z \longmapsto \bar{z}^{-1}$ ergeben. Für rhombische Tori bekommt man etwas kompliziertere Möbiusreflexionen. Im Fall von $\mathcal{J}_D$ erhält man $z \longmapsto i\bar{z}$ und $z \longmapsto -i\bar{z}$ als Möbiusreflexionen. Deshalb nehmen die Spiegelachsen Werte aus $e^{i\frac{\pi}{4}}\mathbf{R}$ und $e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathbf{R}$ an. Für $\mathcal{J}_E$ ergeben sich die Reflexionen:

$$z \longmapsto \frac{\bar{z}+i}{1+i\bar{z}} \qquad \text{und} \qquad z \longmapsto \frac{\bar{z}-i}{1-i\bar{z}} \quad ,$$

und für $\mathcal{J}_F$ ergeben sich:

$$z \longmapsto \frac{1-\bar{z}}{1+\bar{z}} \qquad \text{und} \qquad z \longmapsto \frac{\bar{z}+1}{\bar{z}-1} \quad .$$

Die Funktion $\wp_g$ hat $z \longmapsto -\bar{z}$ und $z \longmapsto \bar{z}^{-1}$ als Möbiusreflexionen, weshalb die Bilder der Spiegellinien wieder in $i\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{S}^1$ enthalten sind.

Nun geben wir noch die speziellen Verzweigungswerte und die vereinfachten Differentialgleichungen für symmetrische Tori an. Mit Hilfe der Gleichungen (1.2) – (1.4) lassen sich aus D alle anderen Verzweigungswerte bestimmen. Damit ergeben sich für symmetrische Tori spezielle Werte für D, E, F und P:

- quadratischer Torus:

$$D = e^{i\frac{\pi}{4}} \; ; \qquad E = i\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \; ; \qquad F = \cot\left(\frac{3\pi}{8}\right) \; ; \qquad P = 1 \; ;$$

- rechteckige Tori:

$$D = e^{i\alpha} \; ; \qquad E = i\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \; ; \qquad F = \cot\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right) \; ; \qquad P = \cot(\alpha) \; ;$$

$$\text{mit} \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \; ;$$

- rhombische Tori:

$$D = R \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \; ; \qquad P = e^{i\beta} \; , \text{ mit } \tan(\beta) = \frac{R^4 - 1}{2R^2} \; \text{ und } \; R \in \mathbf{R}^+ \; .$$

Hiermit ergeben sich einfachere Differentialgleichungen:

- quadratischer Torus:

$$\left(\frac{\mathcal{J}_D{}'}{\mathcal{J}_D}\right)^2 = \mathcal{J}_D{}^2 + \frac{1}{\mathcal{J}_D{}^2} \quad , \tag{1.21}$$

$$\left(\frac{\mathcal{J}_E{}'}{\mathcal{J}_E}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathcal{J}_E{}^2 + \frac{1}{\mathcal{J}_E{}^2} + \tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cot^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) \quad , \tag{1.22}$$

$$\left(\frac{\mathcal{J}_F{}'}{\mathcal{J}_F}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathcal{J}_F{}^2 + \frac{1}{\mathcal{J}_F{}^2} - \tan^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) - \cot^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) \quad , \tag{1.23}$$

$$\left(\frac{\wp_g{}'}{\wp_g}\right)^2 = -2 \cdot \left(\wp_g - \frac{1}{\wp_g}\right) = \frac{4}{\mathcal{J}_D{}^2} \quad , \tag{1.24}$$

- rechteckige Tori:

$$\left(\frac{\mathcal{J}_D{}'}{\mathcal{J}_D}\right)^2 = \mathcal{J}_D{}^2 + \frac{1}{\mathcal{J}_D{}^2} - 2\cos(2\alpha) \quad , \tag{1.25}$$

$$\left(\frac{\mathcal{J}_E{}'}{\mathcal{J}_E}\right)^2 = \sin^2(\alpha) \cdot \left(\mathcal{J}_E{}^2 + \frac{1}{\mathcal{J}_E{}^2} + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \quad , \tag{1.26}$$

$$\left(\frac{\mathcal{J}_F{}'}{\mathcal{J}_F}\right)^2 = \cos^2(\alpha)\cdot\left(\mathcal{J}_F{}^2+\frac{1}{\mathcal{J}_F{}^2}-\tan^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)-\cot^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\right), \tag{1.27}$$

$$\left(\frac{\wp_g{}'}{\wp_g}\right)^2 = -2\sin(2\alpha)\cdot\left(\wp_g-\frac{1}{\wp_g}\right)+4\cos(2\alpha)=\frac{4}{\mathcal{J}_D{}^2}\quad, \tag{1.28}$$

- rhombische Tori:

$$\left(\frac{\mathcal{J}_D{}'}{\mathcal{J}_D}\right)^2 = \mathcal{J}_D{}^2+\frac{1}{\mathcal{J}_D{}^2}-2i\tan(\beta)\quad, \tag{1.29}$$

$$\left(\frac{\wp_g{}'}{\wp_g}\right)^2 = \frac{-2}{\cos(\beta)}\cdot\left(\wp_g-\frac{1}{\wp_g}\right)+4i\tan(\beta)=\frac{4}{\mathcal{J}_D{}^2}\quad. \tag{1.30}$$

Kapitel 2

Minimalflächen

Bevor wir uns dem eigentlichen Thema dieser Arbeit zuwenden, nämlich der Konstruktion elliptischer Minimalflächen, werden in diesem Kapitel die dazu benötigten Definitionen und Sätze aus der Theorie der Minimalflächen zusammengetragen. Die meisten Aussagen sind der Arbeit [16] von H. Karcher entnommen. Einige Absätze sind in enger Zusammenarbeit mit M. Steffens entstanden und deshalb ganz ähnlich in [32] zu finden. Auch viele andere Abhandlungen, die im Literaturverzeichnis aufgeführt sind, wurden auf geeignete Darstellungen der Grundlagen zum Thema Minimalflächen hin untersucht und haben den Inhalt dieses Kapitels beeinflußt. Der Abschnitt 2.5 beruht auf einer Arbeit von H. Jenkins und J. Serrin (siehe [13]).

2.1 Grundlagen

Zunächst legen wir einige Bezeichnungen fest.

Wenn $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt in $\mathbf{R}^3$ bezeichnet, dann wird in $\mathbf{C}^3$ durch

$$\langle\!\langle V + iW, X + iY \rangle\!\rangle := \langle V, X \rangle - \langle W, Y \rangle + i \left(\langle V, Y \rangle + \langle W, X \rangle \right)$$

eine $\mathbf{C}$-Bilinearform induziert, wobei $V, W, X, Y \in \mathbf{R}^3$ sind.

Nun sei $f : M \longrightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten, $p \in M$ und $X \in T_pM$. Dann wird die Richtungsableitung der Abbildung f in Richtung X im Punkt p auf eine der beiden Arten bezeichnet:

$$\partial_X f_p \quad = \quad df_p \cdot X \qquad \in T_{f(p)}N \quad .$$

In der vorliegenden Arbeit wollen wir unter einer Minimalfläche immer eine orientierbare, reguläre, zusammenhängende Minimalfläche verstehen. Diese Adjektive werden nur manchmal der Deutlichkeit halber erwähnt. Die in Kapitel 3 dieses Textes betrachteten Minimalflächen könnten wir auch auf Kleinschen Flaschen statt auf Tori definieren; dann wären diese Flächen nicht orientiert. Sie sind aber durch Ausdehnung ihres Definitionsbereichs auf einen Torus orientierbar. Reguläre Flächen sind Flächen ohne Singularitäten, denen also in jedem Punkt eindeutig eine Normale zugeordnet werden kann. Die meisten der hier betrachteten Minmalflächen sind außerdem eigentlich und vollständig. Unter einer eigentlichen Fläche versteht man eine Fläche, für die gilt, daß Urbilder kompakter Mengen kompakt sind. Vollständig bedeutet anschaulich, daß man auf der Minimalfläche herumlaufen kann, ohne jemals an einen Rand von ihr zu stoßen.

Definition 2.1:
Unter einer Fläche $F : M \longrightarrow \mathbf{R}^3$ verstehen wir eine zweimal stetig differenzierbare Immersion einer Riemannschen Fläche M. Auch das Bild $F(M) \subset \mathbf{R}^3$ bezeichnet man als Fläche, und M wird auch Parameterbereich der Fläche genannt.

Auf Grund dieser Definition sind Flächen in diesem Text immer orientierbar, zusammenhängend und regulär.

Definition 2.2:
Jetzt bezeichne $F : M \longrightarrow \mathbf{R}^3$ eine Fläche, und es sei $p \in M$ und $X, Y \in T_pM$, dann verwenden wir folgende Größen zur Beschreibung von F:

1. *die Normalenabbildung $N : M \longrightarrow \mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$, die jedem Punkt $p \in M$ die Einheitsnormale der Fläche im Punkte $F(p)$ zuordnet;*
2. *die Riemannsche Metrik g, die auch erste Fundamentalform genannt wird und in jedem Punkt $p \in M$ folgendermaßen definiert ist:*
$$g_p(X, Y) \quad := \quad \langle dF_p \cdot X, dF_p \cdot Y \rangle \quad ; \tag{2.1}$$
3. *die Weingartenabbildung S, die durch $\quad dF \cdot S = dN \quad$ gegeben ist;*
4. *die zweite Fundamentalform b, die in jedem $p \in M$ folgendermaßen definiert ist:*
$$b_p(X, Y) \quad := \quad g_p(SX, Y) \quad ; \tag{2.2}$$
5. *die beiden Eigenwerte von S_p, die die Hauptkrümmungen der Fläche im Punkt p sind, und die zwei Eigenvektoren von S_p, die senkrecht aufeinander stehen, wenn die Hauptkrümmungen im Punkt p unterschiedlich groß sind;*
6. *die mittlere Krümmung H im Punkt $p \in M$:*
$$H_p \quad := \quad \frac{1}{2}\, spur(S_p) \quad ; \tag{2.3}$$
7. *die Gaußsche Krümmung K im Punkt $p \in M$:*
$$K_p \quad := \quad det(S_p) \quad ; \tag{2.4}$$

8. *die totale Gaußsche Krümmung C der Fläche, auch kurz Totalkrümmung genannt, die durch Integration der Gaußschen Krümmung über die ganze Fläche definiert ist:*

$$C \quad := \quad \int_M K \, dA \quad . \tag{2.5}$$

Weil die Weingartenabbildung g-symmetrisch ist, $g(SX, Y) = g(X, SY)$, was man leicht nachrechnen kann, ist die zweite Fundamentalform symmetrisch, $b(X, Y) = b(Y, X)$.

Definition 2.3:
Wenn $v \in \mathbf{R}^3$ ein Vektor ist, dessen Fußpunkt im Punkt $F(p)$ der Fläche F liegt, dann bezeichnet $v^{\text{norm}} = \langle v, N(p)\rangle N(p)$ seinen Normal- und $v^{\tan} = v - v^{\text{norm}}$ seinen Tangentialanteil zur Fläche F.

Definition 2.4 (Geodätische):
Es sei $I \subset \mathbf{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $c : I \longrightarrow M$ und $F \circ c : I \longrightarrow F(M)$ eine zweimal stetig differenzierbare, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, dann heißt c geodätische Linie oder kurz Geodätische, wenn gilt:

$$\left(\partial_{\dot{c}}\left(dF_c \cdot \dot{c}\right)\right)^{\tan} = 0 \quad . \tag{2.6}$$

Definition 2.5 (Krümmung und Torsion):
Es bezeichne $F \circ c$ wieder eine zweimal stetig differenzierbare, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, dann sind die Krümmung κ und die Torsion τ von c definiert durch:

$$\kappa(c) \quad := \quad \left\langle d^2F_c(\dot{c}, \dot{c}), N \circ c \right\rangle \quad ; \tag{2.7}$$

$$\tau(c) \quad := \quad \left\langle dN_c \cdot \dot{c}, dF_c \cdot D^{90}\dot{c} \right\rangle \ . \tag{2.8}$$

Für Geodätische erhält man jetzt den nächsten Satz, dessen Gleichungen sich ziemlich einfach nachrechnen lassen.

Satz 2.1:
Wenn $c : I \longrightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodätische bezeichnet, dann gilt für die Krümmung κ und die Torsion τ der Geodätischen:

$$\kappa(c) \quad = \quad -g_c(S\dot{c}, \dot{c}) \quad ; \tag{2.9}$$

$$\tau(c) \quad = \quad g_c(S\dot{c}, D^{90}\dot{c}) \ . \tag{2.10}$$

Wichtig für spätere Überlegungen ist die Gestalt von Krümmungslinien und geodätischen Asymptotenlinien auf der Fläche. Weil für Asymptotenlinien $S\dot{c}$ senkrecht zu $\dot{c}$ steht, gilt für geodätische Asymptotenlinien $\kappa \equiv 0$, weshalb sie Geraden auf der Fläche sind. Da für Krümmungslinien $S\dot{c}$ proportional zu $\dot{c}$ ist, haben Krümmungslinien keine Torsion und sind aus diesem Grund ebene Kurven.

2.2 Weierstraß Repräsentation

Definition 2.6 (Minimalfläche):
Eine Minimalfläche ist eine Fläche, deren mittlere Krümmung H_p in jedem Punkt $p \in M$ verschwindet, d. h. es gilt $spur(S_p) = 0$ für alle $p \in M$.

Hieraus folgt, daß die beiden Hauptkrümmungen in jedem Punkt der Fläche gleich groß sind und entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Satz 2.2 (Weierstraßsches Repräsentationstheorem):
Es sei das Tripel (M, G, dh) gegeben, wobei M eine Riemannsche Fläche, G eine meromorphe Funktion und dh ein holomorphes Differential auf M sei. Zusätzlich soll gelten, daß dh an der Stelle $p \in M$ genau dann eine n-fache Nullstelle besitzt, wenn G im Punkt p eine n-fache Null- oder Polstelle hat. Weiter sei

$$d\Psi = (d\psi_1, d\psi_2, d\psi_3) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{G} - G\right), \frac{i}{2}\left(\frac{1}{G} + G\right), 1\right) \cdot dh \quad , \tag{2.11}$$

dann ist durch

$$F(z) = (f_1(z), f_2(z), f_3(z)) = \Re \int_{z_0}^{z} d\Psi \tag{2.12}$$

eine Minimalfläche gegeben.

Falls $\Re \int_\gamma d\psi_\nu = 0$ für $\nu = 1, 2, 3$ und für jeden geschlossenen Weg γ auf M gilt, ist F auf M wohldefiniert; ansonsten ist F auf der universellen Überlagerung von M wohldefiniert.

Umgekehrt gilt, daß es zu jeder einfach zusammenhängenden Minimalfläche eine Riemannsche Fläche M, eine meromorphe Funktion G und ein holomorphes Differential dh auf M mit den oben genannten Eigenschaften gibt.

Falls die Minimalfläche nur zusammenhängend ist, kann $d\Psi$ nicht als Differential einer holomorphen Funktion Ψ aufgefaßt werden, sondern die $d\psi_\nu$ sind nur lokal definierte Differentialformen.

Einen Beweis der Aussagen dieses Theorems findet man z.B. in dem Buch [25, Paragraph 8] von R. Osserman.

Das Tripel (M, G, dh) nennen wir Weierstraßdaten der Minimalfläche F. Wenn aus dem Kontext heraus klar ist, auf welcher Riemannschen Fläche die Minimalfläche gegeben ist, dann läßt man M auch schon einmal weg und bezeichnet das Tupel (G, dh) als Weierstraßdaten. Das Differential dh wird Höhendifferential genannt, weil man die dritte Komponente im $\mathbf{R}^3$ üblicherweise als Höhe bezeichnet. Die Funktion G heißt Gaußabbildung, weil G die stereographische Projektion der Normalenabbildung N der Minimalfläche ist. Diese Tatsache ermöglicht es, die Gaußabbildung zu konstruieren, wenn man eine Vorstellung von der Gestalt der Minimalfläche hat. Den Beweis, daß G die stereographische Projektion von N ist, findet man in [16, Section 1.4]. Als Integrationsanfang z_0 kann irgendein Punkt auf der Riemannschen Fläche M gewählt werden; wenn man die Integration von zwei unterschiedlichen Startpunkten aus beginnt, dann unterscheiden sich die beiden Minimalflächen im Raum nur durch eine Translation. Die Riemannsche Fläche M ist in Kapitel 3 stets ein flacher Torus mit vier Punktierungen.

Definition 2.7 (Assoziierte Familie):
Es sei F eine Minimalfläche mit den Weierstraßdaten (M, G, dh). Dann heißt die Flächenschar F_ϑ mit den Weierstraßdaten $\left(M, G, e^{-i\vartheta}dh\right)$ assoziierte Familie der Fläche F; die Fläche $F_{\pi/2}$ nennt man die zu F konjugierte Fläche oder einfach nur Konjugierte von F und bezeichnet sie auch mit F^*.

Alle Flächen F_ϑ der assoziierten Familie sind natürlich auch Minimalflächen, da sich an der Null- und Polstellenverteilung des Differentials durch Multiplikation mit $e^{-i\vartheta}$ ja nichts ändert und deshalb nach wie vor alle Bedingungen des Satzes 2.2 erfüllt sind.

Weiter kann man bei genauerem Betrachten der Formeln des Weierstraßschen Repräsentationstheorems (2.2) feststellen, daß gilt:

$$F^*(z) = \Im \int_{z_0}^{z} d\Psi \quad .$$

Hieraus folgt nun:

$$\Psi(z) = \int_{z_0}^{z} d\Psi = F(z) + iF^*(z) \quad \in \mathbf{C}^3 \quad . \tag{2.13}$$

Ein Element F_ϑ der assoziierten Familie kann also auch als eine Projektion der holomorphen Kurve Ψ in den $\mathbf{R}^3$ aufgefaßt werden. Man beachte aber, daß Ψ nicht irgendeine holomorphe Kurve ist, sondern eine spezielle, die die Bedingungen des Weierstraßschen Theorems und insbesondere der Gleichung (2.11) erfüllt. Solche Kurven nennt man holomorphe Nullkurven, weil aus (2.11) $\langle\!\langle d\Psi \cdot X, d\Psi \cdot Y \rangle\!\rangle = 0$ für alle $X, Y \in TM$ folgt, wie man leicht nachrechnen kann (siehe [1, 3. Kapitel]). Umgekehrt können aus jedem $d\Psi$ mit der obigen Eigenschaft eine holomorphe Funktion $G = -(d\psi_1 + id\psi_2)/d\psi_3 = d\psi_3/(d\psi_1 - id\psi_2)$ und ein meromorphes Differential $dh = d\psi_3$ konstruiert werden, die allen Bedingungen des Weierstraßschen Repräsentationstheorems genügen. Damit ergibt sich der folgende Satz.

Satz 2.3:
Minimalflächen in $\mathbf{R}^3$ sind die Realteile holomorpher Nullkurven in $\mathbf{C}^3$.

Satz 2.4:
Es sei F eine Minimalfläche mit den Weierstraßdaten (M, G, dh) und F^* die Konjugierte von F, dann gilt:

$$dF^* = -dF \cdot D^{90} \quad , \quad dN^* = dN \quad \text{und} \quad S^* = D^{90}S = -SD^{90} \quad . \tag{2.14}$$

Beweis:
Aus der Bedingung, daß $\Psi = F + iF^*$ eine Nullkurve ist, ergibt sich nach einer kurzen Rechnung $dF^* = \pm dF \cdot D^{90}$. Damit Ψ holomorph ist, muß $d\Psi \cdot D^{90} = i\, d\Psi$ sein. Dies ist nur der Fall, wenn $dF^* = -dF \cdot D^{90}$ gilt.

Da die Gaußabbildung G für alle Flächen F_ϑ gleich ist, muß $dN^* = dN$ gelten, woraus sich dann mit $dF^* = -dF \cdot D^{90}$ ergibt:

$$\begin{aligned} dN^* &= dN \\ &= dF \cdot S \\ &= -dF \cdot D^{90} \cdot D^{90} \cdot S \\ &= dF^* \cdot D^{90} \cdot S \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow S^* = D^{90} S \quad .$$

Da S g-symmetrisch ist, gilt außerdem $g(SD^{90}X, X) = g(D^{90}X, SX) = g(X, -D^{90}SX)$, weshalb die Behauptung folgt. q.e.d.

Mit Hilfe der Weierstraßdaten (M, G, dh) lassen sich auch die wichtigen geometrischen Größen der Fläche ausdrücken. Die Rechnungen hierzu kann man in [16, Section 1.4] nachschlagen. Es seien $p \in M$ und $X \in T_pM$, dann gilt für die Riemannsche Metrik:

$$g_p(X, X) = \frac{1}{4}\left(|G(p)| + \frac{1}{|G(p)|}\right)^2 \cdot |dh_p \cdot X|^2 \quad , \tag{2.15}$$

bzw. in funktionentheoretischer Bezeichnungsweise:

$$ds = \frac{1}{2}\left(|G| + \frac{1}{|G|}\right) \cdot |dh| \quad , \tag{2.16}$$

für die Gaußkrümmung im Punkt p:

$$K_p = -\left(\frac{2}{|G(p)| + \frac{1}{|G(p)|}}\right)^4 \cdot \left|\frac{1}{|G(p)|} \cdot \frac{dG}{dh}(p)\right|^2 \tag{2.17}$$

und für die zweite Fundamentalform:

$$b_p(X, X) = \Re\left(\frac{dG_p \cdot X}{G(p)} \cdot dh_p \cdot X\right) \quad . \tag{2.18}$$

Aus der letzten Formel ergibt sich der nächste Satz.

Satz 2.5:
Es seien die Weierstraßdaten (M, G, dh) einer Minimalfläche, ein Punkt $p \in M$ und ein Tangentialvektor $X \in T_pM$ gegeben, dann gelten die beiden folgenden Aussagen:

1. *X ist genau dann Tangentialvektor einer Asymptotenlinie der Fläche, wenn gilt:*
$$\frac{dG_p \cdot X}{G(p)} \cdot dh_p \cdot X \quad \in i\mathbf{R} \ . \tag{2.19}$$
2. *X zeigt genau dann in die Richtung einer Hauptkrümmung, wenn gilt:*
$$\frac{dG_p \cdot X}{G(p)} \cdot dh_p \cdot X \quad \in \mathbf{R} \ . \tag{2.20}$$

2.3 Symmetrien

Der vorherige Satz ist insofern interessant, weil sich die Symmetrielinien von Minimalflächen als ebene Geodätische und als Geraden, also nach Satz 2.1 als geodätische Krümmungslinien und asymptotische Geodätische, herausstellen werden (siehe hierzu Satz 2.7). Mit Hilfe der obigen Charakterisierung lassen sich diese Symmetrielinien dann bestimmen. Die drei folgenden Sätze sind daher im Zusammenhang mit Symmetrielinien auf Minimalflächen von besonderer Bedeutung.

Satz 2.6:
Es sei F eine vollständige Minimalfläche auf einer Riemannschen Fläche M, F^* die Konjugierte und c eine Kurve in M, dann gilt:

1. *$F \circ c$ ist ebene Geodätische $\iff$ $F^* \circ c$ ist Gerade,*
2. *$F \circ c$ ist Gerade $\iff$ $F^* \circ c$ ist ebene Geodätische.*

Beweis:

$$\text{Es gilt:} \quad \begin{aligned} \kappa^* &= -g\left(S^*\dot{c}, \dot{c}\right) \\ &= -g\left(D^{90} S\dot{c}, \dot{c}\right) \\ &= g\left(SD^{90}\dot{c}, \dot{c}\right) \\ &= g\left(D^{90}\dot{c}, S\dot{c}\right) \\ &= \tau \ . \end{aligned}$$

Daher folgt Behauptung 1.

$$\text{Weiter gilt:} \quad \begin{aligned} \tau^* &= g\left(S^*\dot{c}, D^{90}\dot{c}\right) \\ &= g\left(D^{90} S\dot{c}, D^{90}\dot{c}\right) \\ &= g(S\dot{c}, \dot{c}) \\ &= -\kappa \ . \end{aligned}$$

Hieraus folgt: $\tau^* = 0 \iff \kappa = 0$, woraus Behauptung 2 folgt. q.e.d.

Satz 2.7 (Reflexionstheorem):
Wenn eine ebene Geodätische oder eine Gerade auf einer vollständigen Minimalfläche liegt, dann ist die Spiegelung an der durch die ebene Geodätische definierten Ebene bzw. die $180°$-Drehung um die Gerade eine Kongruenz der Fläche.

Den Beweis zu diesem Satz, der auf dem Schwarzschen Spiegelungsprinzip der Funktionentheorie (s. [2, 3. Kapitel]) basiert, kann man in [16, Section 1.5.1] nachlesen.

Satz 2.8:
Gegeben seien eine Minimalfläche mit den Weierstraßdaten (M, G, dh) und eine Kurve $c : I \longrightarrow M$. Weiter sei $z : M \longrightarrow \mathbf{C}$ eine fest gewählte Karte der Riemannschen Fläche, dann gilt:

Wenn $G(c)$ in einem Meridian oder im Äquator von $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{S}^2$ enthalten ist, dann ist $(|G| + 1/|G|)$ invariant bei analytischer Reflexion an c.

Wenn $\sigma = z \circ c$ ein Geradenstück in $\mathbf{C}$ ist und wenn $h'(\sigma)$ in einer Ursprungsgeraden von $\mathbf{C}$ enthalten ist, dann ist $|dh|$ invariant bei analytischer Reflexion an c; wobei $h'(\sigma)$ durch $dh_c \cdot \dot{c} = h'(\sigma) \cdot dz_c \cdot \dot{c}$ bzgl. der Karte z definiert ist.

Falls alle drei Bedingungen erfüllt sind, bleibt die Metrik $ds = (1/2)(|G| + 1/|G|)|dh|$ invariant bei analytischer Reflexion an der Kurve c, und c ist dann eine Geodätische der Metrik ds.

Weiterhin gilt noch:

$$G(c) \text{ ist in einem Meridian von } \hat{\mathbf{C}} \iff \frac{dG_c \cdot \dot{c}}{G(c)} \in \mathbf{R} \ , \tag{2.21}$$

$$G(c) \text{ ist im Äquator von } \hat{\mathbf{C}} \implies \frac{dG_c \cdot \dot{c}}{G(c)} \in i\mathbf{R} \ . \tag{2.22}$$

Wegen der Bedingungen des vorherigen Satzes an $h'(\sigma)$ und σ gilt $\sigma = z_0 + r_1(c) \cdot e^{i\rho_1}$ und $h'(\sigma) = r_2(c) \cdot e^{i\rho_2}$ mit $r_1(c), r_2(c) \in \mathbf{R}$ und festen $\rho_1, \rho_2 \in [0, \pi)$ und einem geeigneten $z_0 \in \mathbf{C}$. Deswegen ist $e^{-i\vartheta} dh \in \mathbf{R}$ für $\vartheta = \rho_1 + \rho_2$.

Wenn c jetzt eine Kurve mit allen drei Eigenschaften des obigen Satzes ist, dann ist $F_\vartheta \circ c$ eine ebene Geodätische oder eine Gerade auf der Fläche, je nachdem welche Werte dG/G annimmt; wobei F_ϑ das Element der assoziierten Familie zum eben berechneten Winkel $\vartheta = \rho_1 + \rho_2$ bezeichnet.

In besonders interessanten Fällen gibt es eine Fläche F_ϑ, die alle Symmetrielinien enthält. $F_{\vartheta+\pi/2}$ besitzt dann natürlich ebenfalls alle Symmetrielinien. In diesem Fall hat h' entlang aller Symmetrielinien c jeweils eine der konstanten Phasen ϑ oder $\vartheta + \pi/2$.

Auf den ersten Blick könnte man den Eindruck gewinnen, daß Satz 2.8 nicht besonders nützlich ist, da ja die Voraussetzungen sehr speziell sind und zu erwarten ist, daß nicht alle Symmetrielinien auf diese Weise gefunden werden können. In der Praxis erweist sich dieser Satz allerdings als äußerst hilfreich; denn sehr viele der vermuteten Symmetrielinien auf Minimalflächen können dank des Satzes leicht nachgewiesen werden.

Symmetrien von Minimalflächen sind aus zwei Gründen besonders hilfreich. Zum einen sind sie bei der Bestimmung von Perioden bzw. beim Beweis, daß gewisse Perioden nicht auftreten, nützlich, zum anderen kann die gesamte Fläche auf Grund von vorhandenen Symmetrien in kleinere Stücke zerlegt werden.

Der (Translations-)Fundamentalbereich einer vollständigen Minimalfläche ist ein zusammenhängendes Teilstück der Fläche mit den Eigenschaften, daß innere Punkte des Fundamentalbereichs nicht wieder auf Punkte des Fundamentalbereichs abgebildet werden, wenn man ein nicht triviales Element der Gruppe der orientierungserhaltenden Translationssymmetrien der Minimalfläche auf den Fundamentalbereich anwendet, und daß man die vollständige Fläche erhält, wenn man alle Elemente der Translationssymmetriegruppe auf den Fundamentalbereich anwendet.

Unter einem Fundamentalstück einer vollständigen Minimalfläche verstehen wir ein zusammenhängendes Teilstück der Fläche mit zum Fundamentalbereich analogen Eigenschaften, wobei die Symmetriegruppe jetzt allerdings aus allen Spiegelungen an ebenen Geodätischen, 180°-Geradendrehungen, 180°-Normalenrotationen und Punktspiegelungen der Minimalfläche besteht.

Mit Ausnahme der Ebene, des Katenoids und des Helikoids haben alle Minimalflächen mit endlicher Totalkrümmung, da sie keine Rotationsflächen sind, ein nicht degeneriertes Fundamentalstück. Die Tatsache, daß das Katenoid die einzige Rotationsminimalfläche ist, folgt aus der Eindeutigkeit der analytischen Fortsetzung.

Die vollständige Minimalfläche kann also auf Grund von vorhandenen Symmetrien aus dem Fundamentalstück durch Symmetrieoperationen gewonnen werden, d. h. die Weierstraßdaten (G, dh) brauchen nur für dieses relativ kleine Teilstück der Fläche hergeleitet und auch nur auf demselben integriert zu werden, was die Arbeit für Mensch und Computer wesentlich erleichtert.

Im nächsten Abschnitt definieren wir Enden einer Minimalfläche und beschäftigen uns mit der Frage, auf welche Weise Symmetrien nützlich bei der Untersuchung von Perioden sind.

2.4 Perioden und Enden

Bei der Untersuchung von Minimalflächen ist man unter anderem an eingebetteten Flächen interessiert. Die eingebetteten vollständigen Minimalflächen in $\mathbf{R}^3$ lassen sich in unterschiedliche Gruppen einteilen. In bezug auf die Totalkrümmung gibt es zwei Arten von Flächen; nämlich die mit endlicher und die mit nicht endlicher Totalkrümmung. Weiter gibt es ein-, zwei-, dreifach periodische und nicht periodische, eingebettete Minimalflächen. Periodische Minimalflächen haben natürlich unendliche Totalkrümmung. Wenn wir aber die periodischen Flächen auf ihren oben definierten Fundamentalbereich einschränken, dann können sie endliche Totalkrümmung haben. Insbesondere haben dadurch alle in diesem Text vorkommenden Flächen endliche Totalkrümmung. Man betrachtet die einfach periodischen Minimalflächen jetzt also als Einschränkungen auf ihre Fundamentalbereiche $F : M \longrightarrow \mathbf{R}^3/S_\vartheta$, wobei S_ϑ die Symmetriegruppe der Schraubbewegungen bezeichnet.

Denn bei einfach periodischen, eingebetteten Minimalflächen hat man im allgemeinen keine Translationssymmetrien, sondern Schraubbewegungen. Eine Translation ist ein Spezialfall einer Schraubbewegung mit dem Winkel 0° (vergleiche hierzu auch [15, Section 3] und [29, Chapter VIII]). Für zweifach periodische Flächen ergibt sich $F : M \longrightarrow \mathbf{R}^3/G = \mathbf{T} \times \mathbf{R}$. Hierbei ist G die Gruppe der orientierungserhaltenden Translationssymmetrien, $\mathbf{T}$ ein flacher zweidimensionaler Torus und $\mathbf{R}$ die Höhenkomponente der Minimalfläche. Analog erhält man für dreifach periodische Flächen $F : M \longrightarrow \mathbf{R}^3/G = \mathbf{T}^3$, wobei $\mathbf{T}^3$ jetzt ein dreidimensionaler flacher Torus ist.

Wir sind an Minimalflächen endlicher Totalkrümmung deshalb so sehr interessiert, weil für sie der nächste Satz gilt.

Satz 2.9 (Osserman):
G bezeichne eine der oben erwähnten orientierungserhaltenden Translationssymmetriegruppen, und im Fall von nicht periodischen Flächen sei $G = \{id\}$. Nun sei M eine Riemannsche Fläche und $F : M \longrightarrow \mathbf{R}^3/G$ eine vollständige Minimalfläche endlicher Totalkrümmung in einer dreidimensionalen flachen Mannigfaltigkeit, dann gibt es eine kompakte Riemannsche Fläche $\overline{M}$ und eine endliche Anzahl von Punkten $p_1, \ldots, p_n \in \overline{M}$, so daß M isometrisch zu $\overline{M} \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ ist. Die Gaußabbildung G und das Höhendifferential dh der Minimalfläche lassen sich meromorph auf $\overline{M}$ fortsetzen. Die Punkte $p_1, \ldots, p_n$ werden Enden der Fläche genannt.

Den Beweis dieses Theorems kann man in dem Buch [25, Paragraph 9] von R. Osserman nachlesen.

Jetzt stellt sich die Frage, welche Arten von eingebetteten Enden es mit endlicher Totalkrümmung geben kann.

Satz 2.10:
Ein eingebettetes Ende endlicher Totalkrümmung einer Minimalfläche in $\mathbf{R}^3$ ist entweder zu einem Katenoidende oder einer Ebene asymptotisch.

Dieser Satz wird in [29, Chapter II] und in [32, Kapitel 1] bewiesen. Da in der vorliegenden Arbeit zweifach periodische Minimalflächen untersucht werden, ist es interessant etwas über die Art der eingebetteten Enden endlicher Totalkrümmung für solche Flächen zu erfahren. Hierüber liefern [22] oder [29, Chapter VII] die folgende Auskunft:

Satz 2.11:
Wenn (M, G, dh) eine eigentlich immersierte Minimalfläche endlicher Totalkrümmung in $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$ ist, die ein eingebettetes Ende E hat, dann ist E asymptotisch zu einem flachen Zylinder. Ein solches Ende bezeichnet man auch als Scherk-Ende.

Da ein flacher Zylinder in $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$ einer Ebene in $\mathbf{R}^3$ entspricht, steht dieses Theorem nicht im Widerspruch zu Satz 2.10.

Bisher haben wir nur über einige spezielle Eigenschaften periodischer Minimalflächen gesprochen, aber noch nicht gesehen wie Perioden entstehen können. Wenn man die Weierstraßdaten über einen nicht trivialen geschlossenen Weg γ auf der Riemannschen Fläche M

integriert, dann heißt $P = \Re \int_\gamma d\Psi$ Periode der Minimalfläche. Auf Grund von Symmetrien der Minimalfläche können teilweise Aussagen über die mögliche Richtung von Perioden gemacht werden, und in bestimmten Fällen gelingt es auf Grund von Symmetrien zu beweisen, daß für eine gewisse Homotopie-Klasse der Wege γ die Periode P null ist, ohne das Integral auszurechnen.

Wenn eine Symmetrielinie durch ein Ende der Minimalfläche läuft, dann kann man als einfach geschlossenen Weg γ, der nur um dieses Ende läuft, eine Kurve wählen, die symmetrisch zu der Symmetrielinie ist. Die integrierte Kurve auf der Fläche ist jetzt auch symmetrisch zu der Symmetrie der Fläche, wobei die Symmetrie der Fläche entweder eine Spiegelsymmetrie an einer ebenen Geodätischen oder eine 180°-Rotation an einer Geraden ist. Die Periode P, die ja der Differenzvektor zwischen Anfangs- und Endpunkt der Kurve auf der Fläche ist, steht deshalb senkrecht auf der Spiegelebene bzw. senkrecht auf der Drehachse.

Wenn also durch ein Ende zwei nicht zueinander parallele Spiegelebenen gehen, dann gilt $P = 0$ für jeden Weg um dieses Ende.

Falls durch ein Ende zwei nicht zueinander parallele Geraden laufen, so gilt zwar im allgemeinen $P \neq 0$ für Wege um jenes Ende, aber die Richtung der Periode, die durch dieses Ende erzeugt wird, ist festgelegt.

2.5 Jenkins-Serrin-Graphen

In diesem Abschnitt widmen wir uns Minimalflächen, die Graphen über einem konvexen Gebiet sind. Deshalb ist der folgende Satz, dessen Beweis man in [16, Section 2.4] von H. Karcher findet, von Interesse.

Satz 2.12 (Krust):
Wenn ein Stück einer Minimalfläche ein Graph über einem konvexen Gebiet ist, dann ist das dazu konjugierte Stück der Fläche ebenfalls ein Graph.

Jetzt wird erläutert, unter welchen Bedingungen das Dirichlet Problem auf konvexen Gebieten lösbar ist, wenn auf dem Rand unendlich als Wert zugelassen ist.

Beim klassischen Dirichlet Problem ist ein konvexes Gebiet $D \subset \mathbf{R}^2$ mit stetigen Werten auf dem Rand vorgegeben. In diesem Gebiet wird eine Minimalfläche gesucht, die Graph über dem Gebiet D ist und auf dem Rand ∂D von D die vorgeschriebenen Werte als Höhe hat. Die Existenz solcher Minimalgraphen für konvexe Gebiete D und stetige Werte auf ∂D hat T. Radó 1930 gezeigt (siehe [28]). Im Jahr 1965 hat J. C. C. Nitsche bewiesen, daß derartige Minimalgraphen auch noch existieren, wenn die Randwerte auf einer Nullmenge des Randes unstetig sind (siehe [24]). Aber auch hier darf der Wert unendlich nicht auf einem ganzen Abschnitt der Randkurve angenommen werden. Bis dahin war also unklar, unter welchen Voraussetzungen ähnliche Flächen wie Scherks zweifach periodische Fläche (1. Scherk-Fläche, siehe Abbildung 2.1 auf der nächsten Seite) aus dem Jahr 1834 existieren.

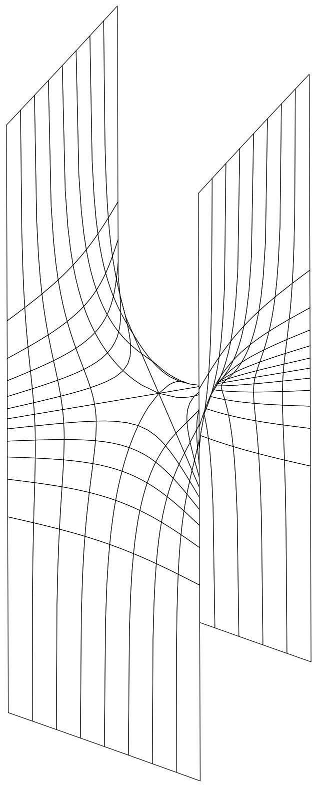
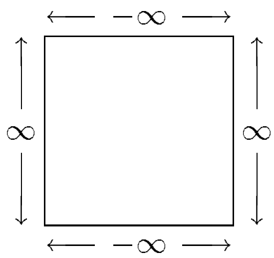


Abbildung 2.1: 1. Scherk-Fläche

Für Scherks zweifach periodische Fläche ist das Gebiet D ein Quadrat und auf den Seiten sind abwechselnd $+\infty$ und $-\infty$ als Randwerte vorgeschrieben.



H. Jenkins und J. Serrin haben dann im Jahr 1965 Bedingungen aufgestellt, unter denen Minimalflächen mit den Werten $\pm\infty$ auf dem Rand existieren. Im folgenden werden diese Voraussetzungen beschrieben und einfache Schlußfolgerungen aus dem Satz von Jenkins-Serrin gezogen. Den Beweis des Satzes von Jenkins-Serrin kann man in [13] nachschlagen.

Für die weiteren Überlegungen bezeichne D ein konvexes Gebiet in $\mathbf{R}^2$ und ∂D den Rand von D. Wenn A ein Teilstück von ∂D ist, auf dem der Wert unendlich angenommen werden soll, dann muß A ein Geradenstück sei. Denn wenn A nicht gerade wäre, so müßte der Minimalgraph in der konvexen Hülle von A die Höhe unendlich haben (siehe hierzu [13, Section 4]). Gleiches gilt natürlich auch für minus unendlich. Deshalb enthalte ∂D offene Geradenstücke $A_1, \ldots, A_k$ und $B_1, \ldots, B_l$ mit der Eigenschaft, daß keine zwei Stücke A_i und auch keine zwei B_i gemeinsame Endpunkte haben. Der Rest von ∂D bestehe aus offenen Kurven $C_1, \ldots, C_m$ und den Endpunkten aller Randkomponenten. Nun suchen wir Bedingungen für eine Lösung der Minimalflächengleichung in D, so daß diese Lösung auf jedem Geradenstück A_i den Wert plus unendlich, auf jedem B_i minus unendlich und auf jedem C_i die dort stetig vorgegebenen Werte annimmt.

Wenn die Mengen $\{A_i\}$ und $\{B_i\}$ leer sind, dann ist das Dirichlet Problem, wie Nitsche gezeigt hat, lösbar.

Die zweifach periodische Scherk-Fläche erhält man, wenn D ein Quadrat ist und ∂D aus den vier Geradensegmenten A_1, B_1, A_2, B_2 besteht.

Satz 2.13 (Jenkins-Serrin):
Es sei P ein einfach geschlossenes Polygon, dessen Eckpunkte eine Teilmenge der Endpunkte der Geradenstücke A_i und B_i bilden. Weiter sei α die Gesamtlänge der Geradenstücke A_i, die in P enthalten sind, und β die Gesamtlänge der Geradenstücke B_i, die in P enthalten sind. Schließlich sei γ der Umfang von P.

Wenn die Menge $\{C_i\}$ nicht leer ist, so ist das oben beschriebene Dirichlet Problem eindeutig lösbar genau dann, wenn

$$2\alpha < \gamma \quad \text{und} \quad 2\beta < \gamma \tag{2.23}$$

für jedes Polygon P gilt.

Wenn die Menge $\{C_i\}$ leer ist, so ist das Dirichlet Problem eindeutig lösbar genau dann, wenn

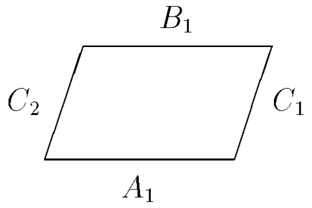
$$\alpha = \beta \tag{2.24}$$

für das Polygon $P = \partial D$ gilt.

Nun betrachten wir noch einige Spezialfälle.

Falls ∂D höchstens ein A_i und höchstens ein B_i enthält, so ist die Bedingung (2.23) offensichtlich für jedes P erfüllt.

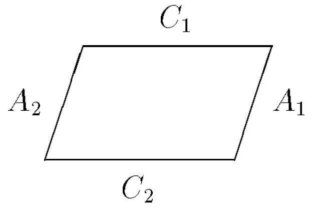
Aus diesem Grund existieren derartige Jenkins-Serrin-Graphen insbesondere für alle Parallelogramme.



Wenn D ein konvexes Viereck mit den Kanten A_1, C_1, A_2, C_2 ist, dann folgt aus (2.23):

$$|A_1| + |A_2| < |C_1| + |C_2| \quad .$$

Deshalb existieren solche Jenkins-Serrin-Graphen für alle Parallelogramme, bei denen an den jeweils kürzeren Seiten der Randwert unendlich angenommen wird.



Falls D ein konvexes Viereck mit den Kanten A_1, B_1, A_2, B_2 ist, dann folgt aus (2.24):

$$|A_1| + |A_2| = |B_1| + |B_2| \quad .$$

Das bedeutet, daß es der zweifach periodischen Fläche von Scherk ähnliche Flächen nicht über einem rechteckigen Gebiet, sondern nur über einem Rhombus gibt. Jenkins-Serrin-Graphen über einem Drachen oder anderen Vierecken, die die obige Bedingung erfüllen, ergeben keine zweifach periodischen Flächen mehr.

Wenn D ein regelmäßiges $2k$-Eck mit den Kanten $A_1, B_1, \ldots, A_k, B_k$ ist, dann erfüllt es ebenfalls die Bedingung (2.24). Deshalb existieren die Jenkins-Serrin-Graphen über diesen Polygonen.

2.6 Konstruktion von Minimalflächen mit Hilfe der Weierstraß Repräsentation

Bei der Konstruktion neuer Minimalflächen bedienen wir uns der Weierstraßdarstellung. Als erstes macht man sich ein qualitativ richtiges Bild der zu konstruierenden Fläche. Hierbei überlegt man sich, ob die Minimalfläche periodisch sein soll, d. h. ob die Fläche in $\mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^3/S_\vartheta$, $\mathbf{T} \times \mathbf{R}$ oder $\mathbf{T}^3$ existieren soll. Weiter überdenkt man die Anzahl und die Art der auftretenden Enden, und man bestimmt das Geschlecht der zugrunde liegenden kompaktifizierten Riemannschen Fläche.

Nun versucht man auf dieser Riemannschen Fläche eine meromorphe Gaußabbildung G zu konstruieren, indem man an geeigneten Stellen der Riemannschen Fläche die Werte der Gaußabbildung auf Grund des qualitativen Bildes vorschreibt. Solche geeigneten Stellen sind z.B. die Enden, die Stellen mit senkrechter Normale und die Symmetrielinien auf der Fläche. Dies hängt aber stark von der gesuchten Minimalfläche ab. Zu beachten ist dabei auch, daß man sich die Suche nach G vereinfachen bzw. erheblich erschweren kann, je nachdem wie man die Fläche im Raum dreht.

Sobald die Gaußabbildung bestimmt ist, können wir mit der Herleitung eines geeigneten meromorphen Höhendifferentials dh auf der kompaktifizierten Riemannschen Fläche beginnen. Hierbei muß zuerst beachtet werden, daß die Metrik $2ds = (|G| + 1/|G|) \cdot |dh|$ auf der Fläche überall endlich und in den Enden unendlich sein muß. Genauer gesagt, muß das Höhendifferential an den Null- und Polstellen der Gaußabbildung auf der Fläche eine Nullstelle gleicher Ordnung haben, und in den Enden muß dh/G eine Polstelle der Ordnung ≥ 2 haben (siehe hierzu Satz 2.2 und Gleichung (2.16) oder [32, Kapitel 1] und [29, Chapter II]). Weiter muß man dh so wählen, daß die gewünschten Symmetrien auf der Fläche auch tatsächlich vorhanden sind. Dafür muß die Metrik bei analytischer Reflexion an den Symmetrielinien invariant sein, und für $(dG/G) \cdot dh$ muß das Richtige gelten (siehe Satz 2.5 und Abschnitt 2.3).

Wenn man nun die Gaußabbildung und das Höhendifferential auf diese Art konstruiert hat, dann enthalten die beiden im allgemeinen noch unbestimmte Parameter. Diese müssen so gewählt werden, daß die Fläche nur die gewünschten und keine weiteren Perioden hat. Wenn wir z.B. eine nicht periodische Minimalfläche suchen, dann müssen alle

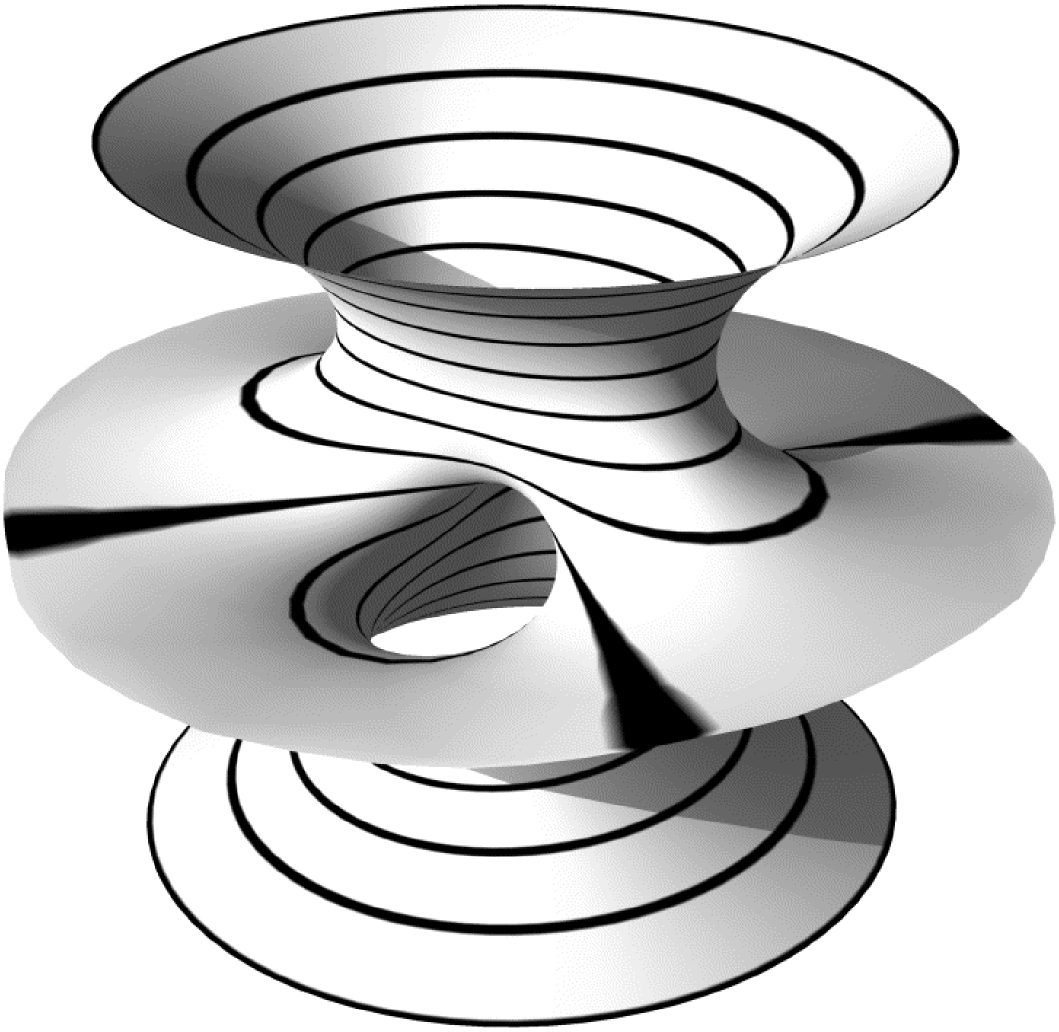


Abbildung 2.2: Costa-Fläche mit Höhenlinien

auf der Riemannschen Fläche geschlossenen Kurven auch nach der Integration, also auf der Minimalfläche, geschlossen sein. Dies ist das sogenannte Periodenproblem.

Falls noch ein oder gar mehrere Parameter unbestimmt sind und trotzdem keine oder nur erwünschte Perioden auftreten, hat man eventuell eine ganze Familie von Minimalflächen, die einander ähnlich sehen und sich durch Verändern eines Parameters deformieren, gefunden.

Natürlich kann diese Art der Konstruktion von Minimalflächen auch fehlschlagen; vielleicht ist das qualitative Bild der Fläche nicht gut genug, oder das Periodenproblem hat keine Lösung. Die qualitativen Bilder zu neuen Minimalflächen entstehen oft dadurch, daß man bekannte Flächen nimmt und sich vorstellt, wie man sie verformen könnte. Allerdings sind manche Deformationsversuche von vornherein zum Scheitern verurteilt, wie die folgenden Sätze, deren Beweise man in [18] bzw. [31] findet, zeigen.

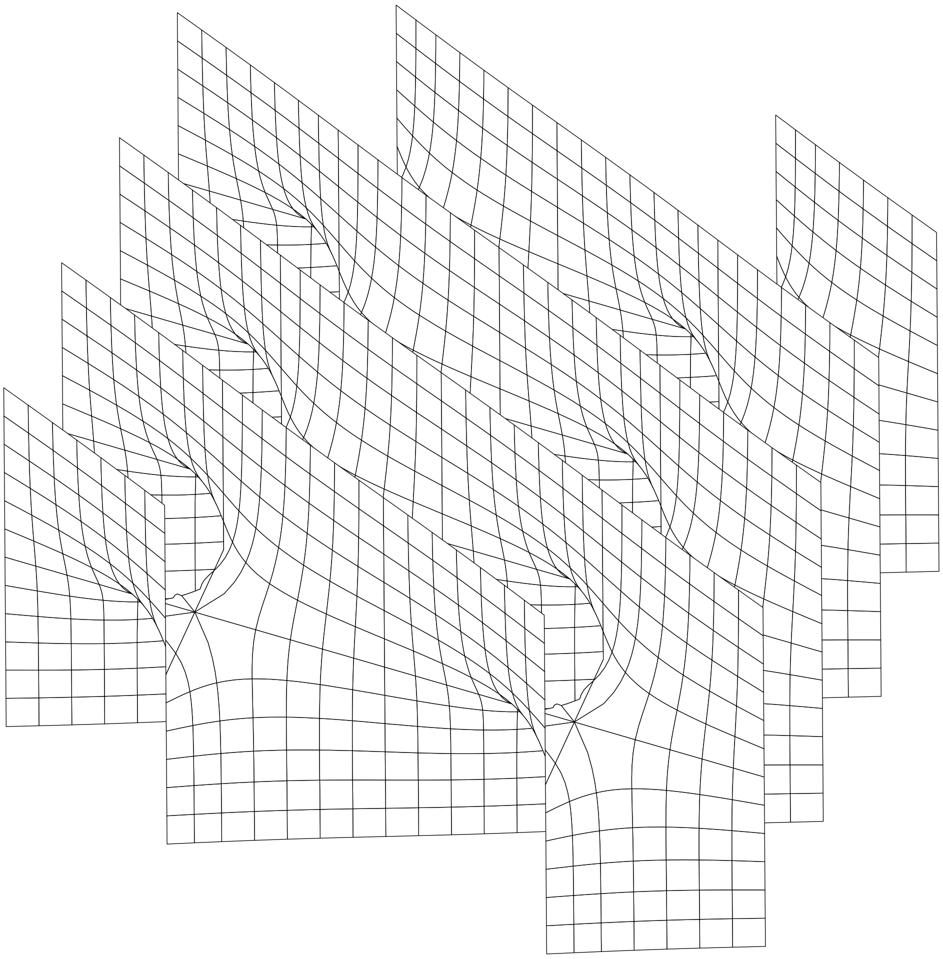


Abbildung 2.3: Weniger symmetrische zweifach periodische Scherk-Fläche

Satz 2.14 (Lopez-Ros):
Das Katenoid ist die einzige nicht ebene, eingebettete, vollständige Minimalfläche endlicher Totalkrümmung, die auf einer Sphäre mit endlich vielen Punktierungen definiert ist.

Andere vollständige Minimalflächen, die auf einer endlich punktierten Sphäre definiert sind, sind entweder nicht eingebettet, wie z.B. die Enneper-Flächen, oder sie haben nicht endliche Totalkrümmung, wie die beiden Scherk-Flächen oder das Helikoid.

Satz 2.15 (Schoen):
Das Katenoid ist die einzige eingebettete, vollständige Minimalfläche endlicher Totalkrümmung mit zwei Enden.

Es gibt also kein Katenoid mit Henkel und andere eingebettete Minimalflächen endlicher Totalkrümmung, die zwei parallele Katenoidenden haben, müssen mindestens ein weiteres Ende haben; ein Beispiel hierfür ist die Costa-Fläche (siehe Abbildung 2.2 auf Seite 33).

Für zweifach periodische, eingebettete, vollständige Minimalflächen können wir die unten folgenden Aussagen machen. Der Satz stammt aus [34] und ist eine Zusammenfassung der für die vorliegende Arbeit wichtigen Sätze aus [22]; er wird hier ohne Beweis wiedergegeben.

Satz 2.16 (Meeks-Rosenberg):
Wenn $F \subset \mathbf{T} \times \mathbf{R}$ eine nicht flache, orientierbare, eigentliche, eingebettete Minimalfläche endlichen topologischen Typs ist, dann gelten die folgenden vier Aussagen:

1. *Die Minimalfläche F hat endliche Totalkrümmung und ist auf einer kompakten Riemannschen Fläche mit endlich vielen Punktierungen definiert. Für die Totalkrümmung C der Fläche gilt:*

$$C = 2\pi \cdot \chi(M) = 2\pi \cdot (2 - 2\gamma - \nu) \quad . \tag{2.25}$$

   Dabei bezeichnet χ die Eulercharakteristik der nicht kompakten Riemannschen Fläche, γ das Geschlecht der kompakten Riemannschen Fläche und ν die Anzahl der Enden der Minimalfläche.

2. *Die Enden, die nach oben gehen, konvergieren gegen verschiedene zueinander parallele Scherk-Enden. Für die Enden, die nach unten zeigen, gilt das gleiche. Man beachte aber, daß ein oberes und ein unteres Ende nicht zueinander parallel sein müssen.*

3. *Sowohl die Anzahl der Enden, die nach oben gehen, als auch die Zahl der Enden, die nach unten zeigen, muß gerade sein. Die Fläche hat also mindestens vier Enden.*

4. *Wenn die Fläche Geschlecht $\gamma = 0$ hat, dann sind alle Enden vertikal, d. h. sie sind jeweils asymptotisch zu senkrechten Ebenen, und ein oberes Ende ist nicht parallel zu einem unteren Ende.*

Die 1. Scherk-Fläche, von der in Bild 2.1 auf Seite 30 der halbe Fundamentalbereich zu sehen ist, ist das älteste Beispiel einer zweifach periodischen Fläche vom Geschlecht 0. Als weiteres Beispiel zu Aussage 4 dient das Bild 2.3 einer verscherten zweifach periodischen Scherk-Fläche auf der vorhergehenden Seite.

Die Minimalflächen, die im nächsten Kapitel betrachtet werden, haben hingegen alle parallele Enden. Dies ist möglich, da sie Geschlecht 1 haben; denn sie sind jeweils auf einem Torus mit vier Punktierungen definiert. Daher gilt für die Totalkrümmung dieser Flächen mit $\gamma = 1$ und $\nu = 4$:

$$C = 2\pi \cdot (2 - 2 - 4) = -8\pi \quad . \tag{2.26}$$

Viele interessante Beispiele von Minimalflächen auf punktierten Sphären sind ausführlich in [16, Chapter 2] und [32, Kapitel 2] mit Hilfe der Weierstraßdarstellung hergeleitet.

An Hand dieser Beispiele kann man die Vorgehensweise bei der Konstruktion von Minimalflächen gut nachvollziehen. Zusätzlich wird in den beiden Texten auch noch erläutert, auf welche Art und Weise die Bilder der Minimalflächen und insbesondere die Parameterlinien auf den Flächen entstehen.

Kapitel 3

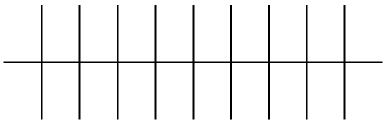
Zweifach periodische Minimalflächen auf Tori

In diesem Kapitel wird eine Familie von zweifach periodischen, vollständigen, eingebetteten Minimalflächen auf rechteckigen Tori beschrieben. Diese Familie wurde von H. Karcher 1988 entdeckt (siehe [15, Section 4] und [16, Section 3.3]) und im selben Jahr auch von W. H. Meeks und H. Rosenberg in der Arbeit [22, Section 7] untersucht.

Auf jedem rechteckigen Torus gibt es eine 2-Parameter Schar von solchen Flächen. Zusammen mit dem konformen Parameter des Torus ergibt sich auf diese Weise insgesamt eine 3-Parameter Flächenfamilie. Bei der Konstruktion der Flächen gehen wir schrittweise vor und beginnen mit Spezialfällen der Familie. In den ersten beiden Abschnitten dieses Kapitels werden Flächen betrachtet, die nur einen Parameter haben, nämlich den konformen des Torus. In den beiden darauf folgenden Abschnitten werden zwei verschiedene 2-Parameter Flächenfamilien beschrieben und im fünften Abschnitt wird die 3-Parameter Familie, die die ersten vier Beispiele als Spezialfälle enthält, konstruiert. Die Flächen aus den Abschnitten 3.1–3.4 sind schon in [15, Section 4] und [16, Section 3.3] beschrieben. Für die 3-Parameter Familie wird in Abschnitt 3.5 gezeigt, daß alle Perioden in einem Gitter liegen. Neu sind die Bilder von den Flächen aus den Abschnitten 3.4 und 3.5. Über das Deformationsverhalten der in Abschnitt 3.4 besprochenen Flächenschar ist eine kurze Videosequenz von mir erstellt worden.

Im folgenden wird die gesuchte Flächenfamilie qualitativ beschrieben. Hierzu betrachten wir eine Familie paralleler, vertikaler Ebenen, die den gleichen Abstand voneinander haben, und eine weitere vertikale Ebene, die senkrecht zu den anderen Ebenen ist.

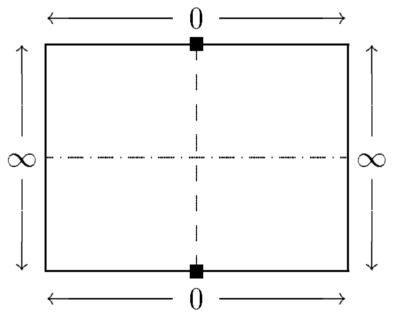
Von oben betrachtet sieht dieses Gebilde dann folgendermaßen aus:

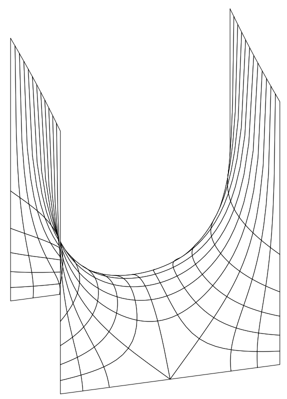


Nun ersetzen wir jede vertikale Schnittlinie in Gedanken durch je einen einfach periodischen Scherkschen Satteltum (2. Scherk-Fläche, siehe Bild 3.1 auf Seite 39), bei dem zwei gegenüber liegende Enden abgeschnitten worden sind. So erhalten wir einen unendlichen Zaun von nebeneinander stehenden Satteltürmen, also eine zweifach periodische Fläche.

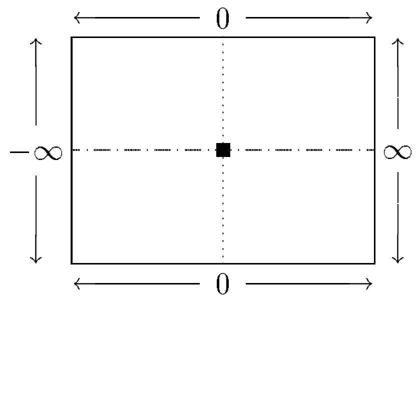
Die Situation wird besonders übersichtlich, wenn die horizontalen Sattelpunkte benachbarter Türme die gleiche Höhe haben; denn dann können alle Geraden, die Scherks zweite Fläche enthält, auch auf der neuen Fläche liegen. In diesen Fällen sind nebeneinander liegende Tunnel entweder parallel oder orthogonal zueinander. Falls es Flächen mit den oben beschriebenen speziellen Symmetrieeigenschaften gibt, werden diese Flächen durch die Geraden, die sie enthalten, in Stücke zerlegt, die als Jenkins-Serrin-Graphen (siehe Abschnitt 2.5 ab Seite 29) definiert werden können. Nun folgt hier noch die Beschreibung der beiden unterschiedlichen Jenkins-Serrin-Graphen, die zu den zwei symmetrischsten Flächenfamilien, die in den nächsten zwei Abschnitten beschrieben werden, gehören.

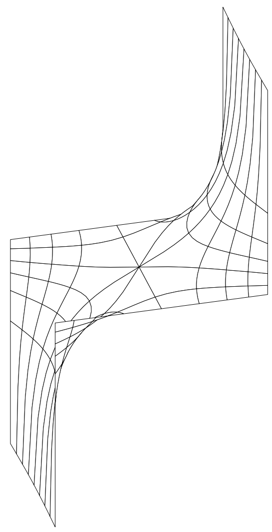
In der Skizze auf der linken Seite sehen wir die Randwerte, die zu dem Jenkins-Serrin-Graphen auf der rechten Seite gehören. Aus diesem Jenkins-Serrin-Graphen entsteht die Fläche, deren benachbarte Satteltürme durch eine vertikale ebene Symmetrielinie miteinander verbunden sind und deren benachbarte Tunnel deshalb orthogonal zueinander liegen. Man beachte, daß hier die 0-Seiten länger als die ∞-Seiten sein müssen (s. Satz 2.13 S. 31).





■ Verzweigungspunkt der Gaußabbildung
–·–·– ebene Symmetrielinie
– – – ebene Symmetrielinie zwischen benachbarten Satteltürmen
········ Gerade zwischen benachbarten Satteltürmen





In der Skizze auf der linken Seite sehen wir wiederum die Randwerte, die dem Jenkins-Serrin-Graphen auf der rechten Seite entsprechen. Aus diesem Jenkins-Serrin-Graphen entsteht die Fläche, deren benachbarte Satteltürme durch eine vertikale Gerade miteinander verbunden sind und deren benachbarte Tunnel deshalb parallel nebeneinander liegen.

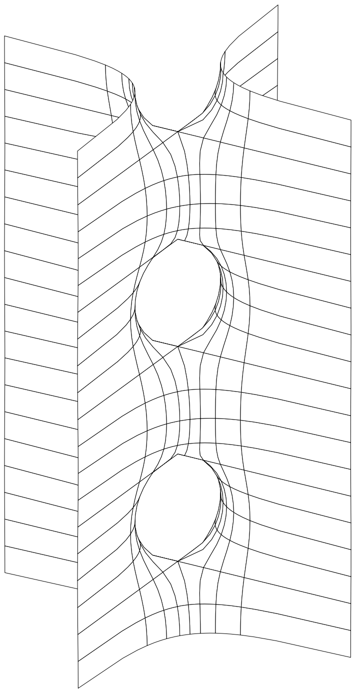


Abbildung 3.1: 2. Scherk-Fläche

3.1 Zaun von symmetrischen Satteltürmen mit ebenen Symmetrielinien

3.1.1 Beschreibung der Fläche

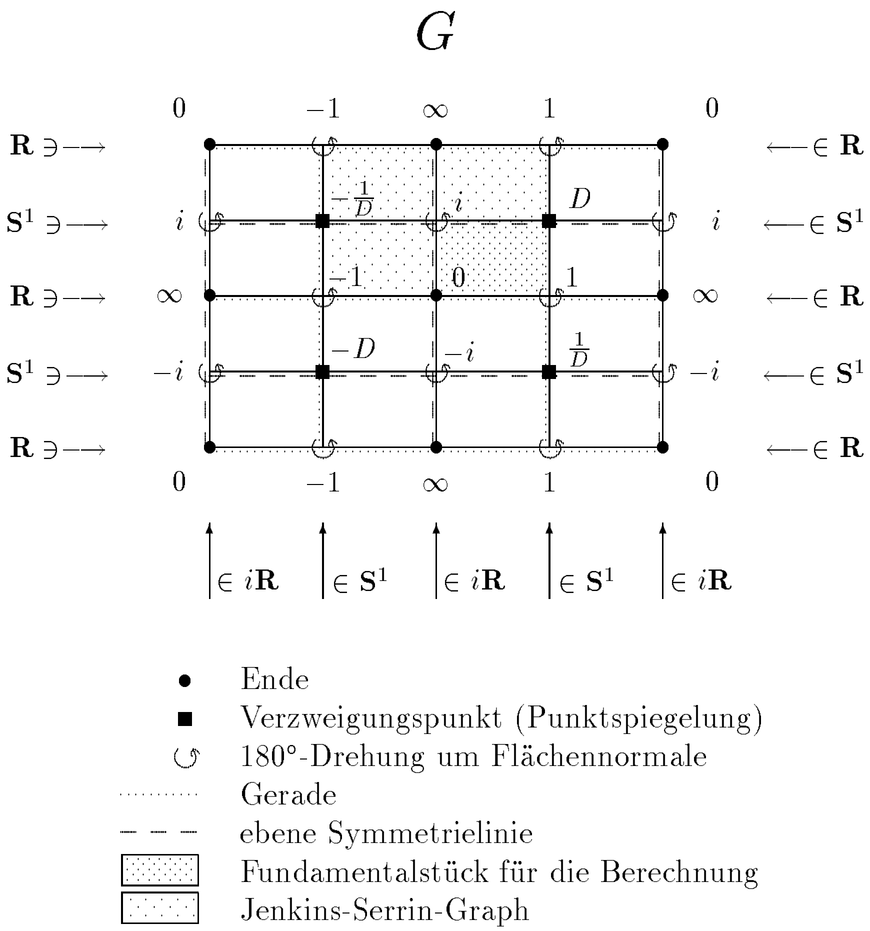
Jetzt wird hier die Flächenfamilie, deren benachbarte Tunnel orthogonal zueinander sind, beschrieben. Diese Flächen haben, wie oben schon erwähnt, eine vertikale Symmetrieebene zwischen benachbarten Satteltürmen. Die Abbildung 3.3 auf Seite 47 zeigt solch eine Fläche. Der Fundamentalbereich der Fläche bzgl. Translation, der auf Seite 27 definiert worden ist, hat vier Scherk-Enden und ist in Abbildung 3.5 auf Seite 49 dargestellt. Die Weierstraßdaten für den Translationsfundamentalbereich sind auf einem rechteckigen Torus definiert. Ein Viertel des Fundamentalbereichs ist ein Jenkins-Serrin-Graph (s. Abb. 3.2 S. 41). Ein Viertel des Jenkins-Serrin-Graphen ist nun ein Fundamentalstück für die Berechnung der Fläche (vgl. S. 27). Wenn wir auf diesem Stück die Weierstraßdaten kennen, können wir es berechnen und dann hieraus die gesamte Fläche durch Spiegeln und Drehen herstellen.

3.1.2 Weierstraßdaten

Nun wollen wir die Gaußabbildung der Fläche auf Grund unserer ungefähren Vorstellung ihres Aussehens konstruieren. Man betrachte hierzu die Abbildung 3.2. Da die Gaußabbildung G Abbildungsgrad 2 hat und weil die Fläche vier parallele Enden hat, ist G in den Enden einfach. Jetzt können wir die Fläche, damit die Gaußabbildung eine übersichtliche Form bekommt, so drehen, daß die Normalen in den Enden senkrecht stehen, d. h. null oder unendlich sind, und daß die Normalen entlang der ebenen Geodätischen durch die Enden rein imaginär sind. Daraus folgt, daß die Normalen entlang der Geraden durch die Enden reell und entlang der Geraden bzw. der ebenen Geodätischen durch die Verzweigungspunkte aus $\mathbf{S}^1$ sind. Damit ergibt sich für die Gaußabbildung:

$$G = \mathcal{J}_D \quad , \quad D = e^{i\alpha} \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad .$$

Der einzige Parameter der Flächenfamilie ist der konforme Parameter α des Torus. Wie sich später (s. Unterabschnitt 3.1.4 S. 45) herausstellt, sind die Flächen für alle α mit $0 < \alpha < \pi/2$ eingebettet.



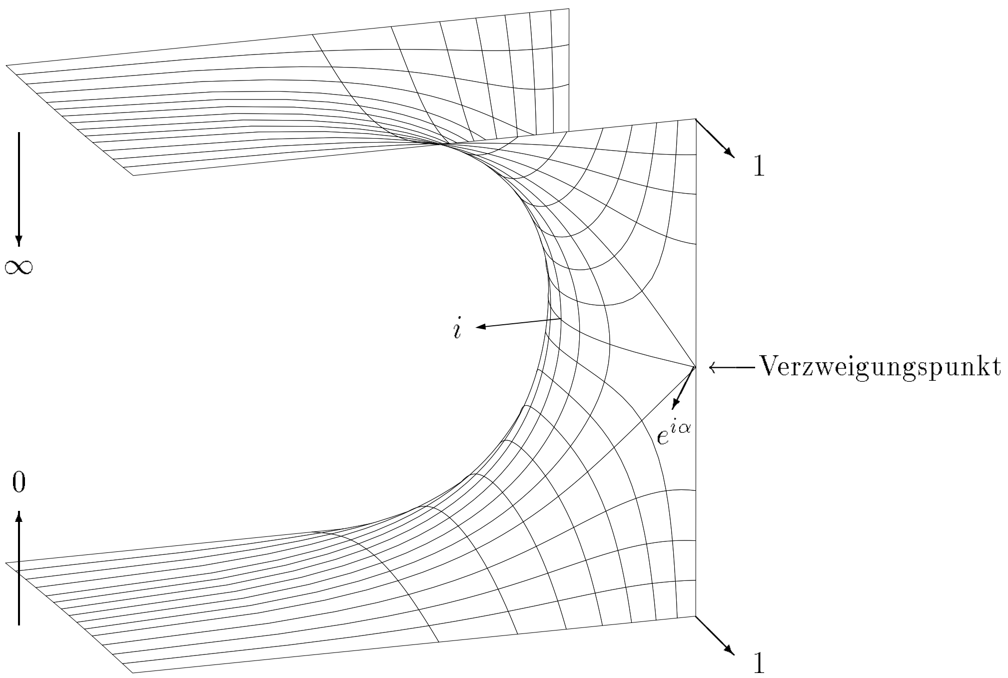


Abbildung 3.2: Jenkins-Serrin-Graph vom Typ A, sein Fundamentalstück ist schattiert.

Damit die Sattelturmstruktur in den Flächen leichter erkannt werden kann, sind die Minimalflächen in fast allen später folgenden Bildern so gedreht, daß die 0-∞-Richtung horizontal liegt,

Da die Gaußabbildung G außer in den Enden der Fläche keine Null- oder Polstellen hat, muß für das Differential der Höhenfunktion gelten: $dh = const \cdot dz$. Weil nämlich die Metrik $2ds = (|G|+1/|G|)\cdot|dh|$ auf der Fläche weder null noch unendlich werden darf, kann dh auf der Fläche keine Nullstellen und keine Polstellen haben. Die komplexe Konstante $const$ darf o. B. d. A. vom Absolutbetrag 1 gewählt werden, da die Multiplikation von dh mit einer reellen Konstanten bloß eine Skalierung der Fläche bewirkt. Die Phase der Konstanten wird so bestimmt, daß die Fläche die gewünschten Symmetrien hat, die im nächsten Abschnitt nachgerechnet werden:

$$dh = i \cdot dz = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_D}{\mathcal{J}_D{}'} \quad .$$

3.1.3 Symmetrien

Jetzt weisen wir nach, daß die Fläche tatsächlich die angegebenen Symmetrien hat. Hierzu betrachten wir die Skizze der Gaußabbildung G $(= \mathcal{J}_D)$ auf dem Torus.

Als erstes ist zu zeigen, daß die Metrik $2ds = (|G|+1/|G|)\cdot|dh|$ bei analytischer Reflexion an den entsprechenden Linien invariant ist. $\sigma(t)$ bezeichne jeweils die entsprechende Linie. $\mathcal{J}_{D}(\sigma(t))$ hat je nach betrachteter Linie Werte ganz in $\mathbf{R}$, ganz in $i\mathbf{R}$ oder ganz in $\mathbf{S}^1$. Das bedeutet, daß die Bilder dieser Linien in einem Meridian bzw. im Äquator von $\mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$ enthalten sind. Deshalb bleibt $(|G|+1/|G|)$ invariant bei analytischer Reflexion an diesen Linien (s. Satz 2.8 S. 26). Anschließend muß noch untersucht werden, ob auch $|dh|$ invariant bleibt. Wir betrachten hierzu:

$$dh_\sigma \cdot \dot\sigma = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_{D\,\sigma}\cdot\dot\sigma}{\mathcal{J}_{D}'(\sigma)} \tag{3.1}$$

$$\text{mit}\quad (\mathcal{J}_{D}')^2 \overset{1.25}{=} \mathcal{J}_{D}{}^4 - 2\cos(2\alpha)\cdot\mathcal{J}_{D}{}^2 + 1 \quad \text{(siehe hierzu Abschnitt 1.4)}\quad .$$

Für die waagerechten, gepunkteten Linien gilt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_{D}(\sigma) \in \mathbf{R} \\ \Longrightarrow\quad & d\mathcal{J}_{D\,\sigma}\cdot\dot\sigma \in \mathbf{R} \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} \text{und}\quad & \mathcal{J}_{D}(\sigma) \in \mathbf{R} \\ \Longleftrightarrow\quad & \mathcal{J}_{D}{}^2(\sigma) \in \mathbf{R}_0^+ \\ \Longrightarrow\quad & \mathcal{J}_{D}{}^2(\sigma) + \frac{1}{\mathcal{J}_{D}{}^2(\sigma)} \geq 2 \geq 2\cos(2\alpha) \\ \Longrightarrow\quad & \mathcal{J}_{D}{}^2(\sigma) - 2\cos(2\alpha) \geq -\frac{1}{\mathcal{J}_{D}{}^2(\sigma)} \\ \Longleftrightarrow\quad & \mathcal{J}_{D}{}^2(\sigma)(\mathcal{J}_{D}{}^2(\sigma) - 2\cos(2\alpha)) \geq -1 \\ \overset{1.25}{\Longleftrightarrow}\quad & (\mathcal{J}_{D}'(\sigma))^2 \in \mathbf{R}_0^+ \\ \Longleftrightarrow\quad & \mathcal{J}_{D}'(\sigma) \in \mathbf{R}\quad . \end{aligned} \tag{3.3}$$

Aus (3.1), (3.2) und (3.3) folgt:

$$dh_\sigma \cdot \dot\sigma \in i\mathbf{R}\ , \tag{3.4}$$

d. h. $dh_\sigma \cdot \dot\sigma$ ist ein Meridian von $\mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$, woraus folgt, daß $|dh|$ invariant bei analytischer Reflexion an diesen Linien ist (s. Satz 2.8).

Für die senkrechten, gestrichelten Linien gilt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{J}_{D}(\sigma) \in i\mathbf{R} \\ \Longrightarrow\quad & d\mathcal{J}_{D\,\sigma}\cdot\dot\sigma \in i\mathbf{R} \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} \text{und}\quad & \mathcal{J}_{D}(\sigma) \in i\mathbf{R} \\ \Longleftrightarrow\quad & \mathcal{J}_{D}{}^2(\sigma) \in \mathbf{R}_0^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \mathcal{J}_D{}^2(\sigma) + \frac{1}{\mathcal{J}_D{}^2(\sigma)} \leq -2 \leq 2\cos(2\alpha) \\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{J}_D{}^2(\sigma) - 2\cos(2\alpha) \leq -\frac{1}{\mathcal{J}_D{}^2(\sigma)} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathcal{J}_D{}^2(\sigma)(\mathcal{J}_D{}^2(\sigma) - 2\cos(2\alpha)) \geq -1 \\
&\overset{1.25}{\Longleftrightarrow} \quad (\mathcal{J}_D{}'(\sigma))^2 \in \mathbf{R}_0^+ \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathcal{J}_D{}'(\sigma) \in \mathbf{R} \quad .
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Aus (3.1), (3.5) und (3.6) folgt:

$$dh_\sigma \cdot \dot{\sigma} \in \mathbf{R} \; , \tag{3.7}$$

d. h. $dh_\sigma \cdot \dot{\sigma}$ ist ein Meridian von $\mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$, woraus folgt, daß $|dh|$ invariant bei analytischer Reflexion an diesen Linien ist.

Für die waagerechten, gestrichelten Linien gilt:
$\mathcal{J}_D(\sigma) \in \mathbf{S}^1$ und zwar genauer $\mathcal{J}_D(\sigma) = e^{ir}$ mit $r \in [\alpha, \pi - \alpha]$ für die eine Linie und $r \in [\pi + \alpha, 2\pi - \alpha]$ für die andere Linie.

$$\Longrightarrow \quad d\mathcal{J}_{D\sigma} \cdot \dot{\sigma} = \pm i e^{ir} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}
&\text{und} \quad \mathcal{J}_D{}^2(\sigma) = e^{i2r} \\
&\overset{1.25}{\Longleftrightarrow} \quad (\mathcal{J}_D{}'(\sigma))^2 = e^{i2r}(e^{i2r} - 2\cos(2\alpha) + e^{-i2r}) \\
&\qquad\qquad = 2e^{i2r}\underbrace{(\cos(2r) - \cos(2\alpha))}_{\leq 0 \text{ für } r\in[\alpha,\pi-\alpha] \text{ bzw. } [\pi+\alpha,2\pi-\alpha]} \\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{J}_D{}'(\sigma) = (\text{rein imaginärer Term}) \cdot e^{ir} \quad .
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Aus (3.1), (3.8) und (3.9) folgt:

$$dh_\sigma \cdot \dot{\sigma} \in i\mathbf{R} \; , \tag{3.10}$$

d. h. $dh_\sigma \cdot \dot{\sigma}$ ist ein Meridian von $\mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$, woraus folgt, daß $|dh|$ invariant bei analytischer Reflexion an diesen Linien ist.

Für die senkrechten, gepunkteten Linien gilt:
$\mathcal{J}_D(\sigma) \in \mathbf{S}^1$ und zwar genauer $\mathcal{J}_D(\sigma) = e^{ir}$ mit $r \in [-\alpha, \alpha]$ für die eine Linie und $r \in [\pi - \alpha, \pi + \alpha]$ für die andere Linie.

$$\Longrightarrow \quad d\mathcal{J}_{D\sigma} \cdot \dot{\sigma} = \pm i e^{ir} \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned}
&\text{und} \quad \mathcal{J}_D{}^2(\sigma) = e^{i2r} \\
&\overset{1.25}{\Longleftrightarrow} \quad (\mathcal{J}_D{}'(\sigma))^2 = e^{i2r}(e^{i2r} - 2\cos(2\alpha) + e^{-i2r}) \\
&\qquad\qquad = 2e^{i2r}\underbrace{(\cos(2r) - \cos(2\alpha))}_{\geq 0 \text{ für } r\in[-\alpha,\alpha] \text{ bzw. } [\pi-\alpha,\pi+\alpha]} \\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{J}_D{}'(\sigma) = (\text{reeller Term}) \cdot e^{ir} \quad .
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Aus (3.1), (3.11) und (3.12) folgt:

$$dh_\sigma \cdot \dot{\sigma} \in \mathbf{R} \ , \tag{3.13}$$

d. h. $dh_\sigma \cdot \dot{\sigma}$ ist ein Meridian von $\mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$, woraus folgt, daß $|dh|$ invariant bei analytischer Reflexion an diesen Linien ist.

Hiermit ist nun gezeigt, daß die Metrik ds bei analytischer Reflexion an den oben genannten Linien invariant ist. Daher sind diese Linien Geodätische der Metrik. Jetzt müssen wir noch untersuchen, ob die Linien Symmetrienlinien auf der Fläche, also Geraden oder ebene Geodätische sind. Dazu muß $(dG/G) \cdot dh$ für die verschiedenen Linien ausgerechnet werden (s. Satz 2.5 S. 25). Die entsprechenden Linien seien wieder jeweils mit $\sigma(t)$ bezeichnet.

Für die waagerechten, gepunkteten Linien gilt:

$$\begin{aligned} G(\sigma) \in \mathbf{R} \ , \quad \text{d. h.} \quad & G(\sigma) \text{ ist ein Meridian von } \mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{dG}{G} \in \mathbf{R} \ . \end{aligned} \tag{3.14}$$

Aus (3.4) und (3.14) folgt:

$$\frac{dG}{G} \cdot dh \in i\mathbf{R} \ ,$$

das bedeutet, daß diese Linien **Geraden** auf der Fläche sind (s. Satz 2.5 S. 25).

Für die senkrechten, gestrichelten Linien gilt:

$$\begin{aligned} G(\sigma) \in i\mathbf{R} \ , \quad \text{d. h.} \quad & G(\sigma) \text{ ist ein Meridian von } \mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{dG}{G} \in \mathbf{R} \ . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Aus (3.7) und (3.15) folgt:

$$\frac{dG}{G} \cdot dh \in \mathbf{R} \ ,$$

das bedeutet, daß diese Linien **ebene Geodätische** auf der Fläche sind.

Für die waagerechten, gestrichelten Linien gilt:

$$\begin{aligned} G(\sigma) \in \mathbf{S}^1, \quad \text{d. h.} \quad & G(\sigma) \text{ ist der Äquator von } \mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{dG}{G} \in i\mathbf{R} \ . \end{aligned} \tag{3.16}$$

Aus (3.10) und (3.16) folgt:

$$\frac{dG}{G} \cdot dh \in \mathbf{R} \ ,$$

das bedeutet, daß diese Linien **ebene Geodätische** auf der Fläche sind.

Für die senkrechten, gepunkteten Linien gilt:

$$G(\sigma) \in \mathbf{S}^1, \quad \text{d. h.} \quad G(\sigma) \text{ ist der Äquator von } \mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{dG}{G} \in i\mathbf{R} \ . \tag{3.17}$$

Aus (3.13) und (3.17) folgt:

$$\frac{dG}{G} \cdot dh \in i\mathbf{R} \ ,$$

das bedeutet, daß diese Linien **Geraden** auf der Fläche sind.

Jetzt sind alle Symmetrielinien der Fläche nachgerechnet. Weiterhin ist eine Punktspiegelung jeweils an den Schnittpunkten einer Geraden mit einer ebenen Geodätischen möglich und eine 180°-Drehung um die Flächennormale jeweils an den Schnittpunkten zweier gleichartiger Symmetrielinien.

3.1.4 Perioden

Weil wir geeignete Weierstraßdaten hergeleitet haben, existiert auf Grund des Weierstraßschen Repräsentationstheorems (s. Satz 2.2 S. 22) die Minimalfläche an sich. Außerdem haben wir im vorherigen Unterabschnitt die Symmetrien der Fläche nachgewiesen. Die Geraden auf der Fläche bilden jetzt aber den Rand eines Jenkins-Serrin-Graphen vom Typ A. Da das Dirichlet Problem zu solchen Jenkins-Serrin-Graphen eindeutig lösbar ist, ist die hier konstruierte Minimalfläche die Lösung. Jeder dieser Jenkins-Serrin-Graphen ist eingebettet, und die vollständige Fläche besteht aus Blöcken von Jenkins-Serrin-Graphen, die sich nicht schneiden, woraus folgt, daß die Fläche insgesamt eingebettet ist. Dies alles gilt unabhänging vom Wert des Torusparameters α.

Die Minimalfläche ist offensichtlich zweifach periodisch und auf Grund des Theorems von H. Jenkins und J. Serrin (siehe Satz 2.13 auf Seite 31 und dort insbesondere den zweiten Spezialfall) ist der Abstand zwischen zwei benachbarten Türmen immer größer als der Abstand zwischen zwei Geraden durch ein Ende; also ist die Periode in 1-Richtung immer kleiner als die Periode in 0-Richtung. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Geraden durch dasselbe Ende beträgt π, wie man mit Hilfe des Residuensatzes ausrechnen kann, und der Abstand zwischen zwei benachbarten Türmen hängt vom konformen Parameter α des Torus ab. Je größer α ist, desto größer ist die horizontale Periode. In Abbildung 3.6 auf Seite 50 ist die Fläche für unterschiedliche Werte des konformen Parameters zu sehen.

3.1.5 Die konjugierte Fläche

Wenn wir zur konjugierten Fläche übergehen wollen, müssen wir einfach das Höhendifferential dh mit $-i$ multipizieren. So erhalten wir als Weierstraßdaten für die Konjugierte:

$$G = \mathcal{J}_D \quad , \quad dh = dz \quad , \quad D = e^{i\alpha} \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \ .$$

Aus den Geraden werden ebene Symmetrielinien und umgekehrt. Betrachtet man nun die Skizze der Gaußabbildung G der ursprünglichen Fläche genauer, so liegt die Vermutung nahe, daß die Konjugierte mit der Fläche übereinstimmt, die die folgenden Weierstraßdaten hat:

$$G = \mathcal{J}_{D} \quad , \quad dh = i \cdot dz \quad , \quad D = e^{i\beta} \quad , \quad \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha \quad , \tag{3.18}$$

auch für β gilt in diesem Fall: $0 < \beta < \pi/2$.

Um dies einzusehen, betrachte man am besten ein Fundamentalstück der Fläche, also ein Viertel des Jenkins-Serrin-Graphen. So ein Fundamentalstück ist von zwei Geraden und zwei ebenen Geodätischen berandet. Das dazu konjugierte Fundamentalstück ist somit ebenfalls von zwei Geraden und zwei ebenen Geodätischen begrenzt. Da die Gaußabbildung für die Minimalfläche und ihre Konjugierte gleich ist, läßt sich hieraus die Gestalt der konjugierten Fläche ableiten. Vergleiche hierzu [16, Chapter 4], [17, Section 2.2] oder [32, Abschnitt 1.2.1]. Auf diese Weise erhält man als konjugierte Randkontur des Fundamentalstücks eine Kontur, die dem Rand des Fundamentalstücks der Fläche bis auf die Lage im Raum und die Längen der beiden endlich langen Randkomponenten gleicht. Das endliche Geradenstück der Fläche und die endliche Geodätische der Konjugierten haben dieselbe Länge, weil die Metrik der Fläche und der Konjugierten gleich ist. Analoges gilt selbstverständlich auch für die beiden anderen endlichen Randkurven.

Wenn man das konjugierte Fundamentalstück nacheinander an seinen zwei ebenen Geodätischen spiegelt, bekommt man einen Jenkins-Serrin-Graphen vom Typ A. Da es auf Grund des Satzes 2.13 von H. Jenkins und J. Serrin genau einen Graphen zu einer so vorgegebenen Kontur gibt, ist die Konjugierte selbst wieder ein Element der Flächenschar. Jetzt müssen wir noch überlegen, mit welcher Fläche die Konjugierte übereinstimmt. Hierzu berechnen wir die Länge der endlichen Randkurven. Da die Rechnung in allen Fällen ähnlich verläuft, wird sie nur für die Linie σ vorgeführt, für die $\mathcal{J}_{D}(\sigma) = e^{it}$ mit $t \in [0, \alpha]$ gilt. Für die Berechnung betrachte man die Skizze von $G = \mathcal{J}_{D}$ auf Seite 40 und erinnere sich, daß auf rechteckigen Tori nach (1.25) $(\mathcal{J}_{D}{}')^2 = e^{i2t}(e^{i2t} - 2\cos(2\alpha) + e^{-i2t})$ gilt. Daher ergibt sich nun:

$$\begin{aligned}
\text{Länge}(\sigma) &= \int_{\sigma} ds \\
&= \frac{1}{2} \int_{\sigma} \left(|G| + \frac{1}{|G|} \right) |dh| \\
&= \frac{1}{2} \int_{\sigma} \left(|\mathcal{J}_{D}| + \frac{1}{|\mathcal{J}_{D}|} \right) \left| i \cdot \frac{d\mathcal{J}_{D}}{\mathcal{J}_{D}{}'} \right| \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{\alpha} \left(\left|e^{it}\right| + \left|e^{-it}\right| \right) \left| \frac{i^2\, e^{it}\, dt}{\sqrt{2e^{i2t}\left(\cos(2t) - \cos(2\alpha)\right)}} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{0}^{\alpha} \frac{|dt|}{\left|\sqrt{\cos(2t) - \cos(2\alpha)}\right|} \quad .
\end{aligned}$$

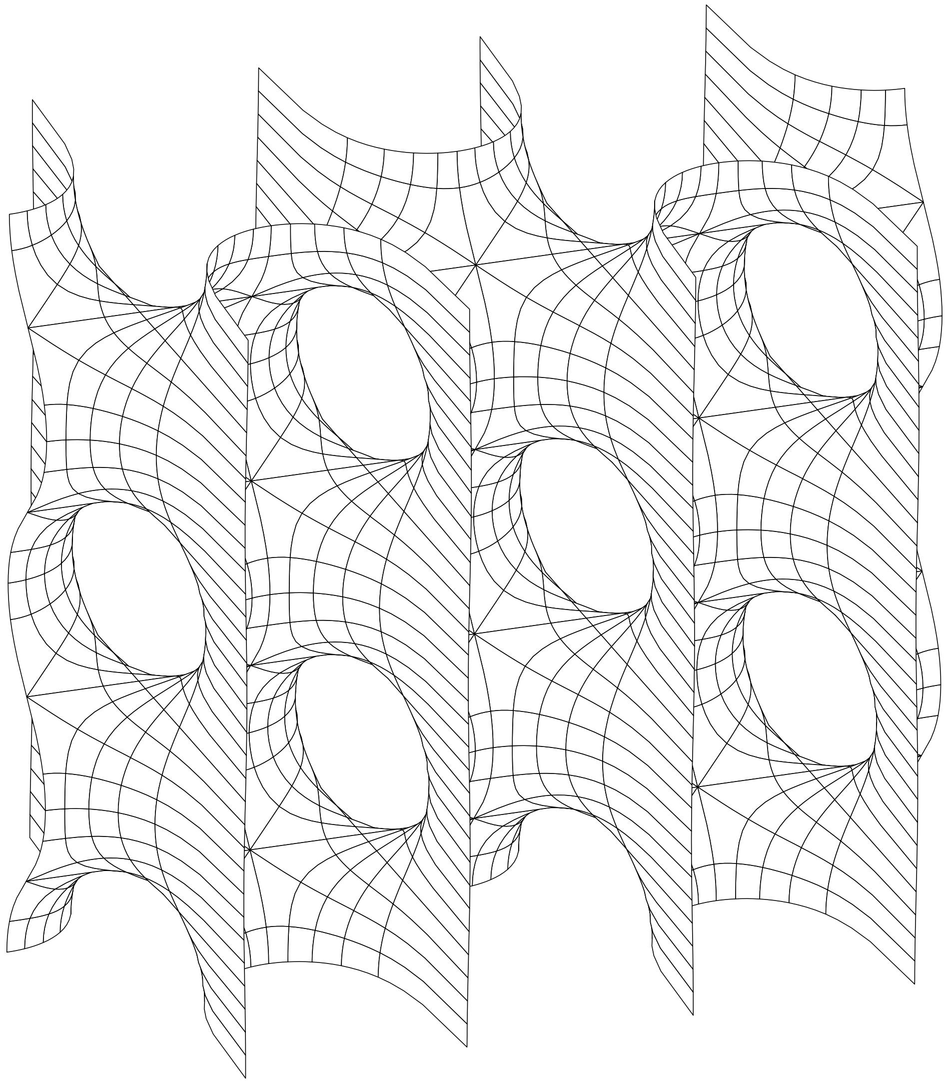


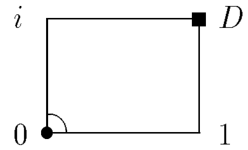
Abbildung 3.3: Zaun von symmetrischen Satteltürmen mit ebenen Symmetrielinien (für $\alpha = \pi/4$)

Jetzt sieht man, daß sich bei Integration von 0 bis α der gleiche Wert ergibt wie bei Integration von $\pi/2 - \alpha$ bis $\pi/2$, woraus die Behauptung (3.18) folgt. Ebenso erkennt man, daß die Fläche, die auf dem quadratischen Torus mit dem konformen Parameter $\alpha = \pi/4$ definiert ist, zu sich selbst konjugiert ist, weil in diesem Fall das endliche Geradenstück und die endliche ebene Geodätische dieselbe Länge haben.

Hieraus ergibt sich eine interessante Folgerung. Da sowohl die Flächen als auch die Konjugierten der 3-Parameter-Schar aus Abschnitt 3.5 eingebettet sind, wie dort gezeigt wird, gibt es zu jeder Fläche aus der 3-Parameter-Familie eine Deformation, die die Fläche in ihre Konjugierte überführt und deren Elemente alle eingebettet sind. Diese Deformation ist natürlich nicht die assoziierte Familie! Sondern die Minimalfläche wird in eine Fläche aus diesem Abschnitt verformt, und anschließend wird diese Fläche in die Konjugierte der ursprünglichen Fläche deformiert.

3.1.6 Parametrisierung

Die Weierstraßdaten $G = \mathcal{J}_D$ und $dh = i \cdot dz$ müssen über das nebenstehende Fundamentalstück auf dem Torus integriert werden:

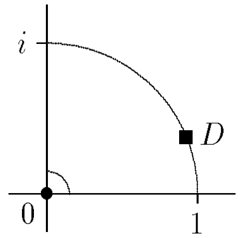


Wir benutzen nun $\mathcal{J}_D$ als lokale Koordinate, d. h. wir schreiben

$$G = \mathcal{J}_D \quad \text{und} \quad dh = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_D}{\mathcal{J}_D{}'}$$

$$\text{mit} \quad (\mathcal{J}_D{}')^2 = \mathcal{J}_D{}^4 - 2\cos(2\alpha) \cdot \mathcal{J}_D{}^2 + 1 \quad \text{(siehe hierzu (1.25) auf Seite 17)}$$

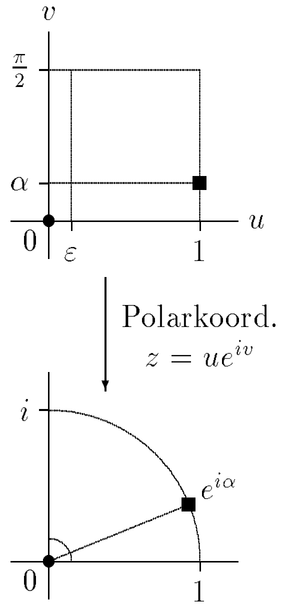
und integrieren über das Bild des Fundamentalstücks in $\mathbf{C}$:



Da der Verzweigungspunkt bei der Integration besonders behandelt werden muß, benötigen wir dafür zwei Teile des Fundamentalstücks, um ihn im Programm als Schnittpunkt von Randkurven der Teilstücke zu identifizieren.

Nun sollen die Parameterlinien auf der Fläche so verlaufen, daß sich Polarkoordinatenzentren in den Enden ergeben. Außerdem sollen sich die Linien in allen Punkten der Fläche mit Ausnahme des Verzweigungspunktes senkrecht schneiden. Dies gelingt durch folgende einfache Abbildung:

Zunächst erzeugt man das nebenstehende rechteckige Gitter aus horizontalen und vertikalen Linien, den sogenannten u- und v-lines. Anschließend wird das Rechteck durch die Polarkoordinatenabbildung $(u, v) \longmapsto z = ue^{iv}$ auf ein Viertelkreissegment abgebildet.
Da 0 nicht auf der Fläche liegt, hat man auch auf dem Kreissegment noch überall orthogonale Parameterlinien. Letztere werden außer im Verzweigungspunkt orthogonal auf die Minimalfläche in $\mathbf{R}^3$ abgebildet, weil die Immersion F in der Weierstraßrepräsentation isometrisch ist.
Die ebenen Geodätischen und die Geraden auf der Fläche sind natürlich als Parameterlinien vorhanden, da sie ja das Fundamentalstück berandenden.



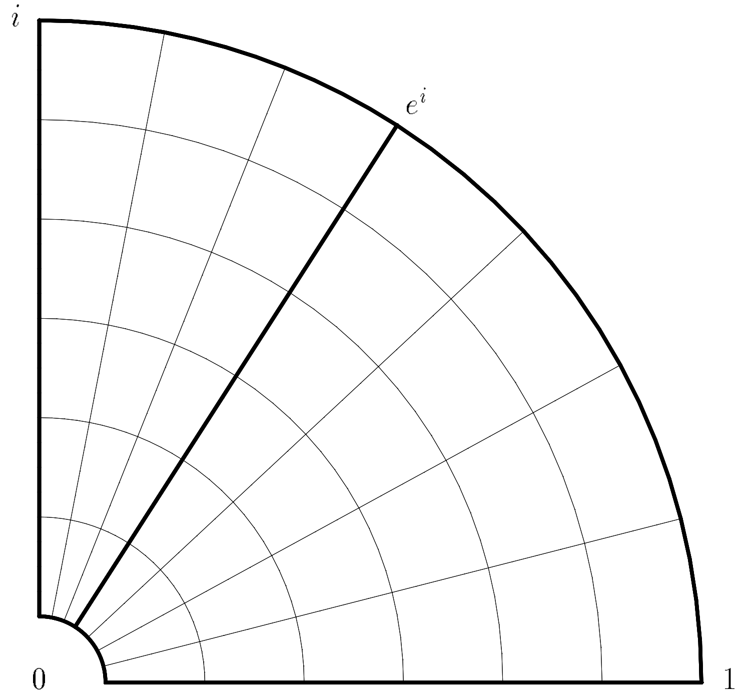


Abbildung 3.4: Aus zwei Teilen bestehender Parameterbereich des Fundamentalstücks (für $\alpha = 1$)

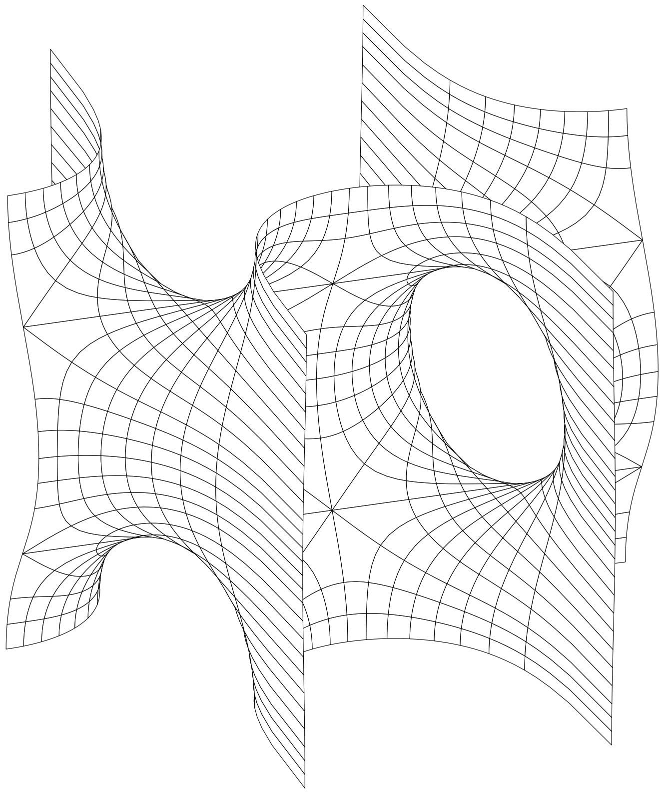


Abbildung 3.5: Fundamentalbereich der Fläche bzgl. Translation ($\alpha = 1$)

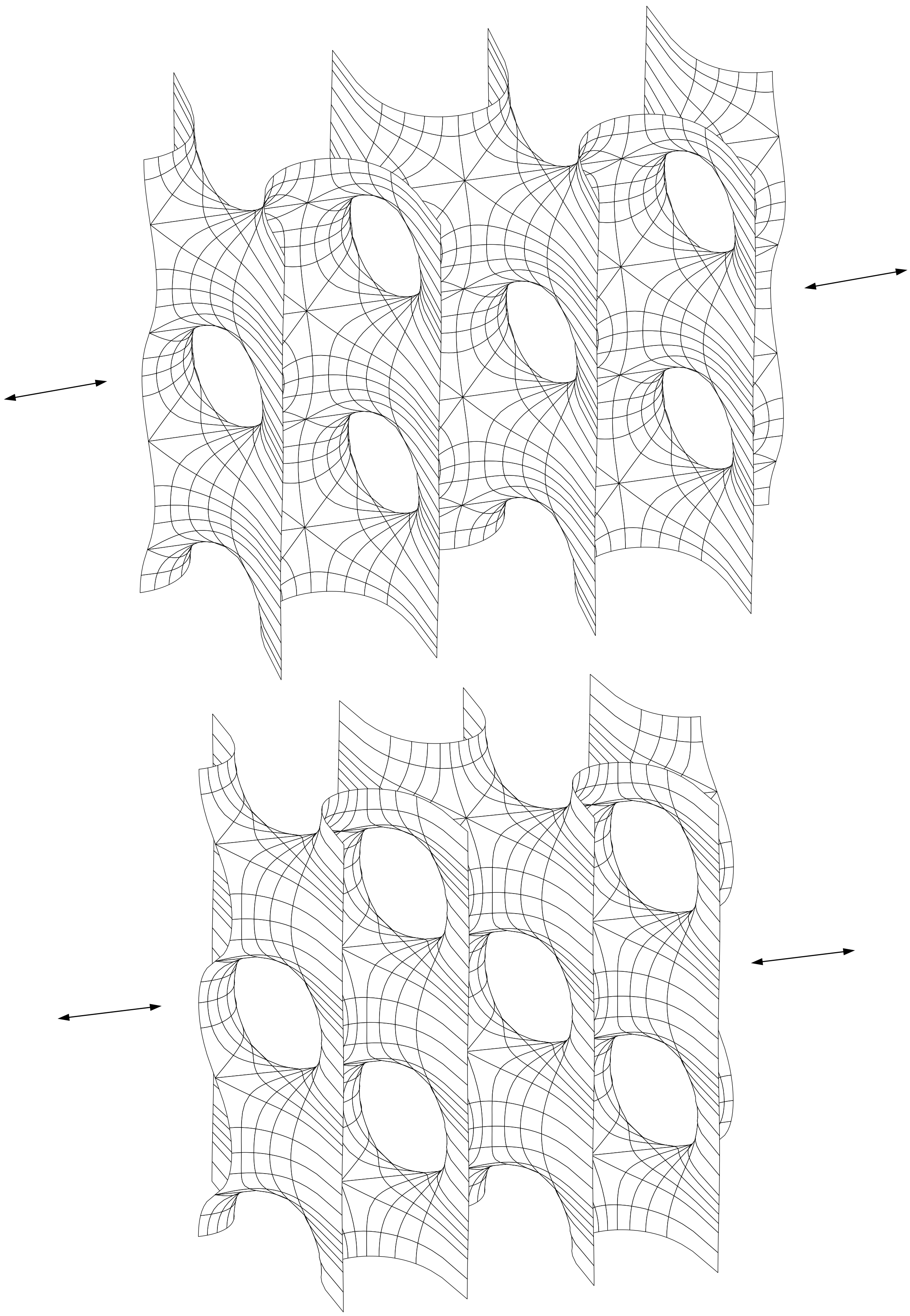


Abbildung 3.6: Dargestellt sind zwei Elemente der Flächenfamilie zu unterschiedlichen α-Werten (oben: $\alpha = 1.0$ und unten: $\alpha = 0.5$). Die Periode in horizontaler Richtung (Pfeile) hängt von dem konformen Parameter α des Torus ab. Je größer α ist, desto größer ist die horizontale Periode. Man beachte, daß die horizontale Periode für alle α größer als die vertikale ist.

3.2 Zaun von symmetrischen Satteltürmen mit Geraden

3.2.1 Beschreibung der Fläche

In diesem Abschnitt wird die Flächenfamilie, deren benachbarte Tunnel parallel nebeneinander liegen, beschrieben. Diese Flächen haben, wie auf Seite 38 schon erwähnt wurde, eine vertikale Gerade zwischen benachbarten Satteltürmen. Die Abbildung 3.10 auf Seite 58 zeigt solch eine Fläche. Wie auch bei der vorherigen Fläche hat der Fundamentalbereich bzgl. Translation vier Scherk-Enden. Er ist in Abbildung 3.11 auf Seite 58 dargestellt. Die Weierstraßdaten für den Translationsfundamentalbereich sind wieder auf einem rechteckigen Torus definiert. Ein Viertel des Fundamentalbereichs ist ebenfalls ein Jenkins-Serrin-Graph (s. Abb. 3.7 S. 54). Ein Viertel des Jenkins-Serrin-Graphen ist auch hier auf Grund der Symmetrien ein Fundamentalstück für die Berechnung der Fläche.

3.2.2 Weierstraßdaten

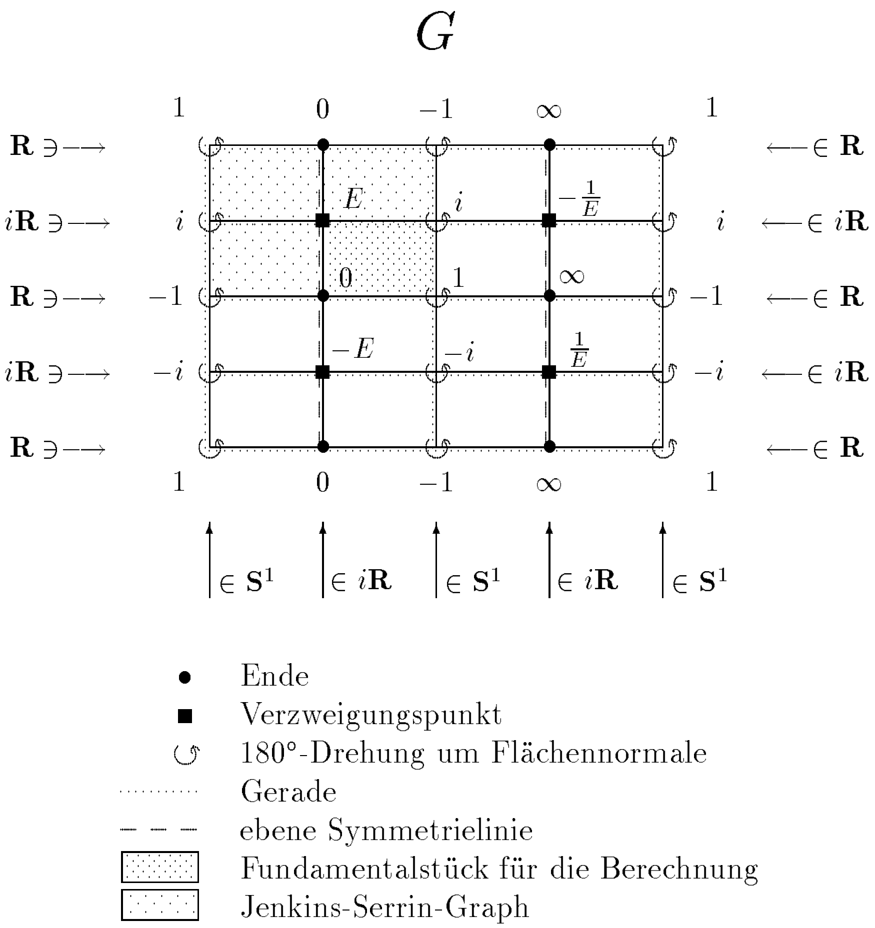
Wie im vorherigen Abschnitt wollen wir nun die Gaußabbildung G der Fläche auf Grund unserer ungefähren Vorstellung ihres Aussehens konstruieren. Man betrachte hierzu die Abbildung 3.7 auf Seite 54. Auch jetzt hat G Abbildungsgrad 2 und ist in den Enden einfach. Damit die Gaußabbildung eine übersichtliche Form bekommt, drehen wir die Fläche wieder so, daß die Normalen in den Enden senkrecht stehen, d. h. null oder unendlich sind, und daß die Normalen entlang der ebenen Geodätischen durch die Enden rein imaginär sind. Daraus folgt, daß die Normalen entlang der Geraden durch die Enden reell, entlang der Geraden durch die Verzweigungspunkte imaginär und entlang der Geraden, die senkrecht zu den Enden, also parallel zu den Normalen der Enden verläuft, aus $\mathbf{S}^1$ sind. Daher ergibt sich für die Gaußabbildung:

$$G = \mathcal{J}_E = \frac{\mathcal{J}_D + 1}{\mathcal{J}_D - 1} \quad , \quad E = i \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad .$$

Der konforme Parameter α des Torus ist der einzige Parameter der Flächenfamilie und die gesamte Flächenschar ist wiederum eingebettet (s. Unterabschnitt 3.2.4 S. 53).

Da die Gaußabbildung G außer in den Enden der Fläche keine Null- oder Polstellen hat, muß für das Differential der Höhenfunktion wieder gelten: $dh = const \cdot dz$. Auch hier ergibt sich für $const = i$, daß die Fläche die gewünschten Symmetrien hat, wie im nächsten Abschnitt nachgerechnet wird;

$$dh = i \cdot dz = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_E}{\mathcal{J}_E{}'} = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_D}{\mathcal{J}_D{}'} \quad .$$



3.2.3 Symmetrien

Nun überprüfen wir wieder, ob die Fläche tatsächlich die angegebenen Symmetrien hat. Hierzu betrachte man die Skizze der obigen Gaußabbildung $G = (\mathcal{J}_D + 1)/(\mathcal{J}_D - 1)$ und die der Jacobi-Funktion $\mathcal{J}_D$ auf Seite 40.

Wiederum muß zuerst gezeigt werden, daß die Metrik ds bei analytischer Reflexion an den entsprechenden Linien invariant ist. $\sigma(t)$ bezeichne wie im letzten Abschnitt jeweils die entsprechende Linie. $G(\sigma(t))$ hat je nach betrachteter Linie Werte ganz in $\mathbf{R}$, ganz in $i\mathbf{R}$ oder ganz in $\mathbf{S}^1$. Das bedeutet, daß die Bilder dieser Linien in einem Meridian bzw. im Äquator von $\mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$ enthalten sind. Deshalb bleibt $(|G| + 1/|G|)$ invariant bei analytischer Reflexion an diesen Linien (s. Satz 2.8 S. 26). Für dh gilt genau das gleiche wie im vorherigen Abschnitt (siehe Seite 42ff.). Damit ist gezeigt, daß die Metrik ds bei analytischer Reflexion an den Linien aus der Skizze der Gaußabbildung invariant ist. Jetzt müssen wir wieder untersuchen, ob die Linien Geraden oder ebene Geodätische sind.

Für die waagerechten, gepunkteten Linien, die durch die Enden laufen, gilt:

$$dh \in i\mathbf{R} \qquad \text{und} \qquad G(\sigma) \in \mathbf{R} \;\; , \quad \text{d. h.} \quad G(\sigma) \text{ ist ein Meridian von } \mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dG}{G} \in \mathbf{R} \quad ,$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{dG}{G} \cdot dh \in i\mathbf{R} \quad ,$$

das bedeutet, daß diese Linien **Geraden** auf der Fläche sind (s. Satz 2.5 S. 25).

Für die waagerechten, gepunkteten Linien, die durch die Verzweigungspunkte gehen, gilt:

$$dh \in i\mathbf{R} \qquad \text{und} \qquad G(\sigma) \in i\mathbf{R} \quad , \quad \text{d. h.} \quad G(\sigma) \text{ ist ein Meridian von } \mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{dG}{G} \in \mathbf{R} \quad ,$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{dG}{G} \cdot dh \in i\mathbf{R} \quad ,$$

das bedeutet, daß diese Linien **Geraden** auf der Fläche sind.

Für die senkrechten, gepunkteten Linien gilt:

$$dh \in \mathbf{R} \qquad \text{und} \qquad G(\sigma) \in \mathbf{S}^1 \quad , \quad \text{d. h.} \quad G(\sigma) \text{ ist der Äquator von } \mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{dG}{G} \in i\mathbf{R} \quad ,$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{dG}{G} \cdot dh \in i\mathbf{R} \quad ,$$

das bedeutet, daß diese Linien **Geraden** auf der Fläche sind.

Für die senkrechten, gestrichelten Linien gilt:

$$dh \in \mathbf{R} \qquad \text{und} \qquad G(\sigma) \in i\mathbf{R} \quad , \quad \text{d. h.} \quad G(\sigma) \text{ ist ein Meridian von } \mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{dG}{G} \in \mathbf{R} \quad ,$$
$$\Longrightarrow \quad \frac{dG}{G} \cdot dh \in \mathbf{R} \quad ,$$

das bedeutet, daß diese Linien **ebene Geodätische** auf der Fläche sind.

Damit sind jetzt wiederum alle Symmetrien der Fläche nachgewiesen.

3.2.4 Perioden

Auch diese Minimalfläche ist zweifach periodisch und eingebettet, da die vollständige Fläche aus Blöcken von Jenkins-Serrin-Graphen, die sich gegenseitig nicht schneiden, zusammengesetzt ist.

Diesmal kann die Periode in 0-Richtung im Gegensatz zu der Fläche aus dem vorherigen Abschnitt (vgl. 3.1.4) auch kleiner sein als die Periode in 1-Richtung, weil die Jenkins-Serrin-Graphen vom Typ B für jedes beliebige konvexe Viereck existieren (s. 2.13). Aber der Abstand zwischen zwei benachbarten Sattelturmblöcken hängt wiederum von dem Torusparameter α ab. Je größer der konforme Parameter ist, desto größer ist die Periode in 0-Richtung.

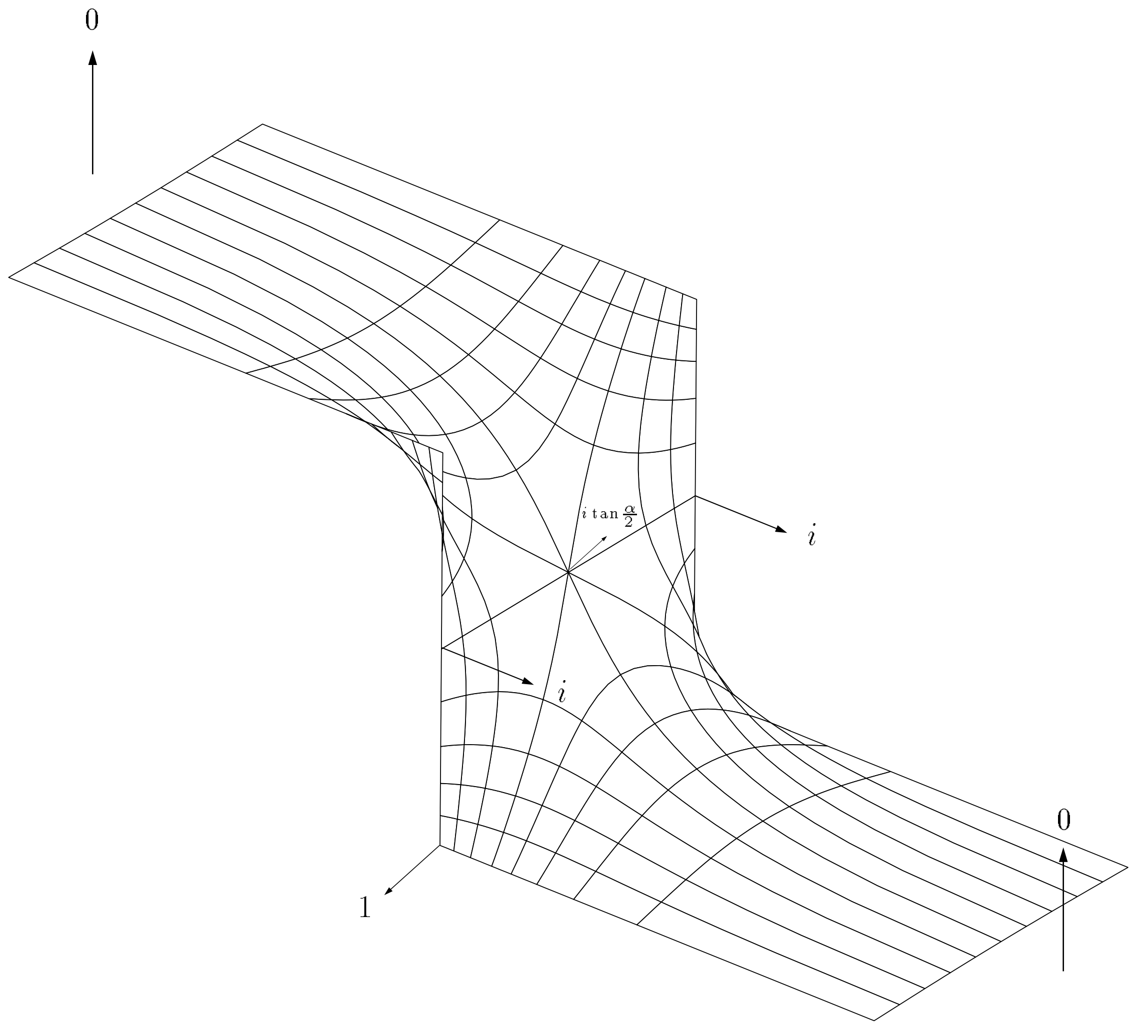


Abbildung 3.7: Jenkins-Serrin-Graph vom Typ B, sein Fundamentalstück ist schattiert.

3.2.5 Die konjugierte Fläche

Um Aussagen über die Konjugierte treffen zu können, betrachten wir zuerst noch einmal den Jenkins-Serrin-Graph vom Typ B. Auf Grund des Satzes 2.12 von R. Krust wissen wir, daß die konjugierte Fläche zu dem Jenkins-Serrin-Graphen auch ein Graph ist. Weiterhin werden aus den Geraden der Fläche ebene Geodätische der Konjugierten und umgekehrt. Außerdem haben der Jenkins-Serrin-Graph und der konjugierte Graph auch noch dieselbe Gaußabbildung. Deshalb läßt sich hieraus die Gestalt der konjugierten Fläche ableiten, die in Abbildung 3.8 dargestellt ist.

Nun setzten wir durch Spiegelungen an ebenen Geodätischen und Drehungen an Geraden die vollständige Konjugierte aus Blöcken der zu dem Jenkins-Serrin-Graphen konjugierten Fläche zusammen. Dabei entsteht wieder eine zweifach periodische, eingebettete Minimalfläche, die wie eine Schar paralleler Ebenen, die schachbrettartig durch Tunnel ver-

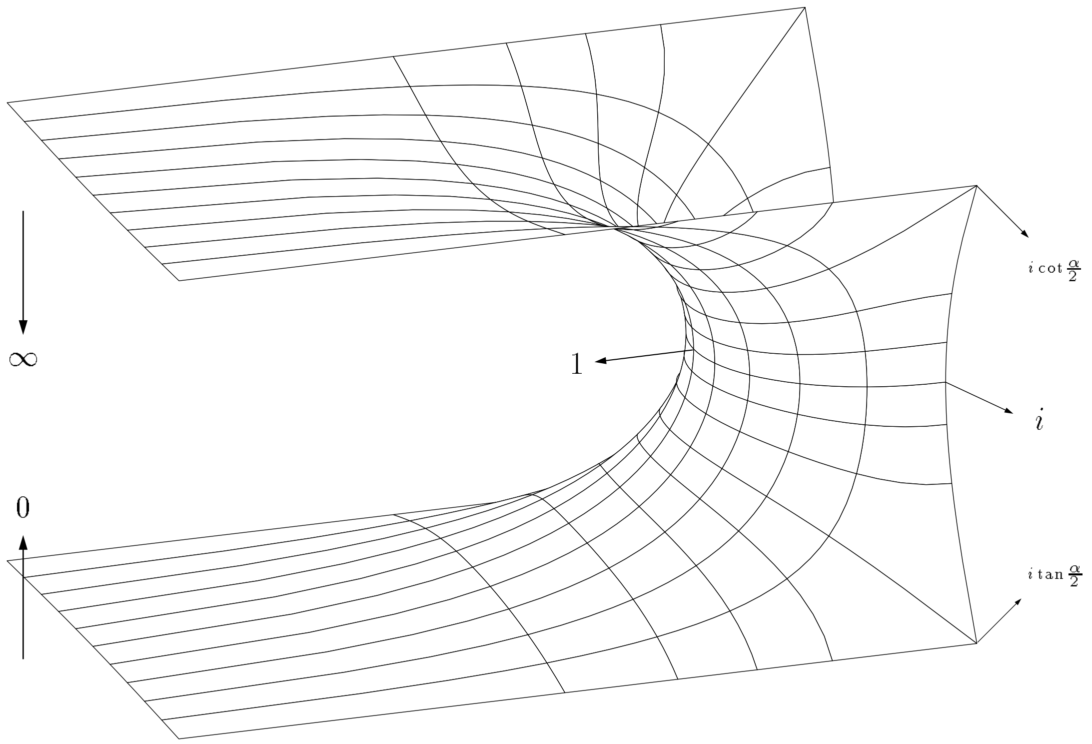
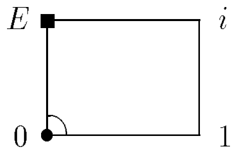


Abbildung 3.8: Konjugierte des Jenkins-Serrin-Graph vom Typ B, sie ist Graph über einem nicht konvexen Gebiet der 0-i-Ebene, und ihr Fundamentalstück ist schattiert.

bunden sind, aussieht (siehe Bild 3.12 auf Seite 59). Der Abstand zwischen zwei Ebenen hängt hier ebenfalls von dem konformen Parameter α des Torus ab (vergleiche Abbildung 3.14 auf Seite 60).

3.2.6 Parametrisierung

Die Weierstraßdaten $G = \mathcal{J}_E = (\mathcal{J}_D + 1)/(\mathcal{J}_D - 1)$ und $dh = i \cdot dz$ müssen über das nebenstehende Fundamentalstück auf dem Torus integriert werden:



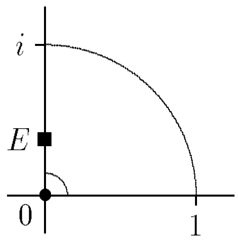
Wir könnten nun $\mathcal{J}_E$ als lokale Koordinate benutzen und schreiben

$$G = \mathcal{J}_E \quad \text{und} \quad dh = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_E}{\mathcal{J}_E{}'}$$

$$\text{mit} \quad (\mathcal{J}_E{}')^2 = \sin^2(\alpha) \cdot \left(\mathcal{J}_E{}^4 + \left(\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cot^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \cdot \mathcal{J}_E{}^2 + 1\right)$$

(siehe hierzu (1.26) auf Seite 17)

und müßten über das Bild des Fundamentalstücks in $\mathbf{C}$ integrieren:

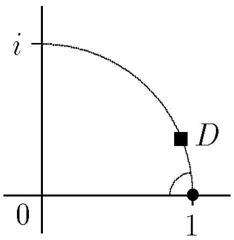


Da es sich jedoch in den nächsten beiden Abschnitten als sinnvoll erweist, $\mathcal{J}_D$ als lokale Koordinate zu benutzen, und weil diese Flächenschar hier jeweils als Grenzfall der zwei Flächenfamilien aus den folgenden beiden Abschnitten auftritt, verwenden wir $\mathcal{J}_D$ auch jetzt als lokale Koordinate und schreiben

$$G = \frac{\mathcal{J}_D + 1}{\mathcal{J}_D - 1} \quad \text{und} \quad dh = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_D}{\mathcal{J}_D{}'}$$

$$\text{mit} \quad (\mathcal{J}_D{}')^2 = \mathcal{J}_D{}^4 - 2\cos(2\alpha) \cdot \mathcal{J}_D{}^2 + 1 \quad \text{(siehe hierzu (1.25) auf Seite 17)}$$

und integrieren über das Bild des Fundamentalstücks in $\mathbf{C}$:



Da der Verzweigungspunkt bei der Integration besonders behandelt werden muß, benötigen wir wieder zwei Teile des Fundamentalstücks, die sogenannten Parts, so daß der Punkt an einer gemeinsamen Ecke der beiden Parts liegt.

Auch hier sollen die Parameterlinien auf der Fläche so verlaufen, daß Polarkoordinatenzentren in den Enden liegen. Außerdem sollen sich die Linien in allen Punkten der Fläche mit Ausnahme des Verzweigungspunktes senkrecht schneiden. Dies gelingt durch folgende Hintereinanderschaltung von Abbildungen:

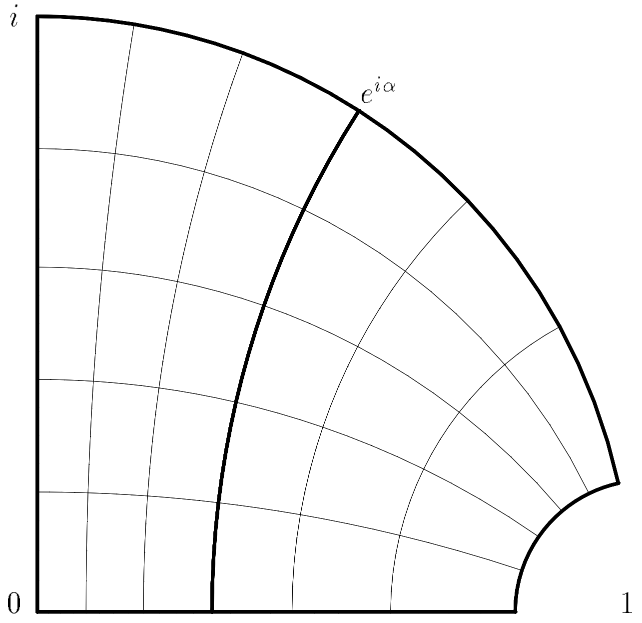
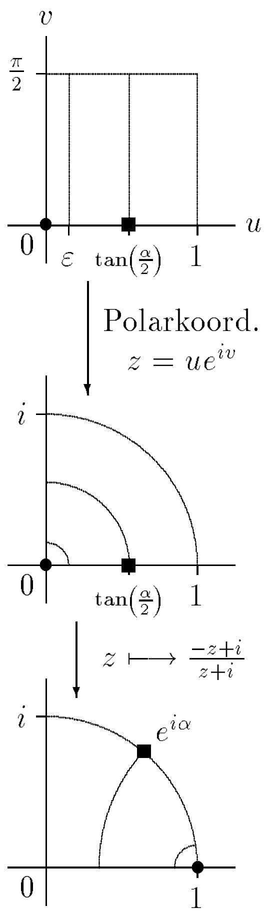


Abbildung 3.9: Aus zwei Parts bestehender Parameterbereich des Fundamentalstücks

Zunächst erzeugt man das nebenstehende rechteckige Gitter aus horizontalen und vertikalen Linien. Daraufhin wird das Rechteck durch die Polarkoordinatenabbildung $(u, v) \longmapsto z = ue^{iv}$ auf ein Viertelkreissegment abgebildet. Schließlich bildet die Möbiustransformation $z \longmapsto (-z+i)/(z+i)$ das Kreissegment auf ein weiteres Viertelkreissegment ab.
Auch bei dieser Parametrisierung hat man auf dem Kreissegment noch überall orthogonale Parameterlinien, weil das Polarkoordinatenzentrum ja im Ende der Fläche liegt. Deshalb erhalten wir außer im Verzweigungspunkt auf der Minimalfläche orthogonale Parameterlinien.
Die ebenen Geodätischen und die Geraden auf der Fläche sind natürlich auch wieder als Parameterlinien vorhanden.



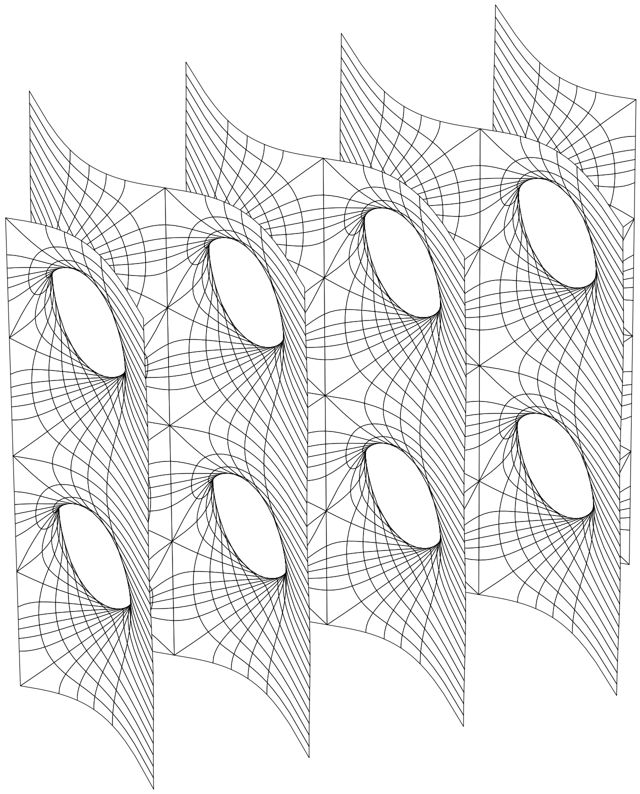


Abbildung 3.10: Zaun von symmetrischen Satteltürmen mit Geraden

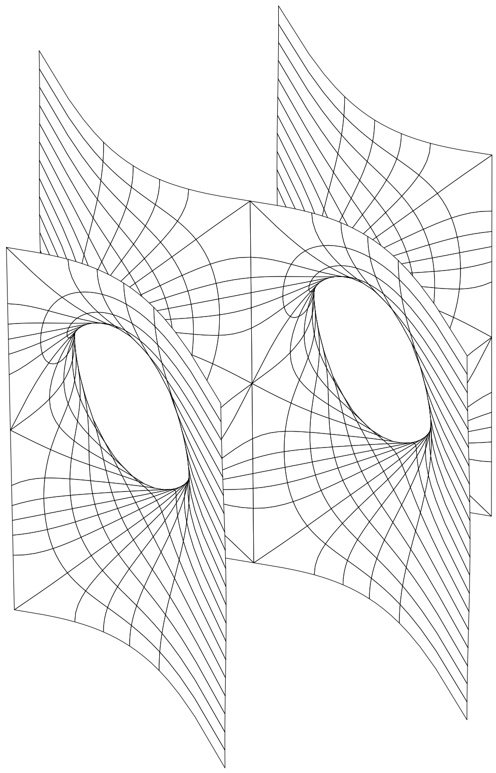


Abbildung 3.11: Translationsfundamentalbereich der Fläche

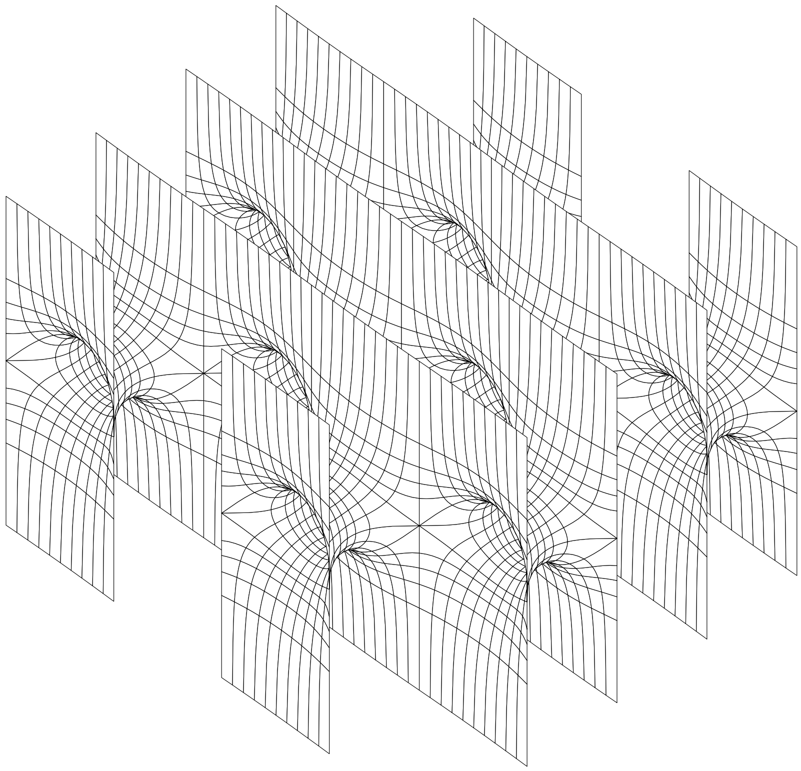


Abbildung 3.12: Konjugierter Zaun von symmetrischen Satteltürmen ($\alpha = \pi/4$)

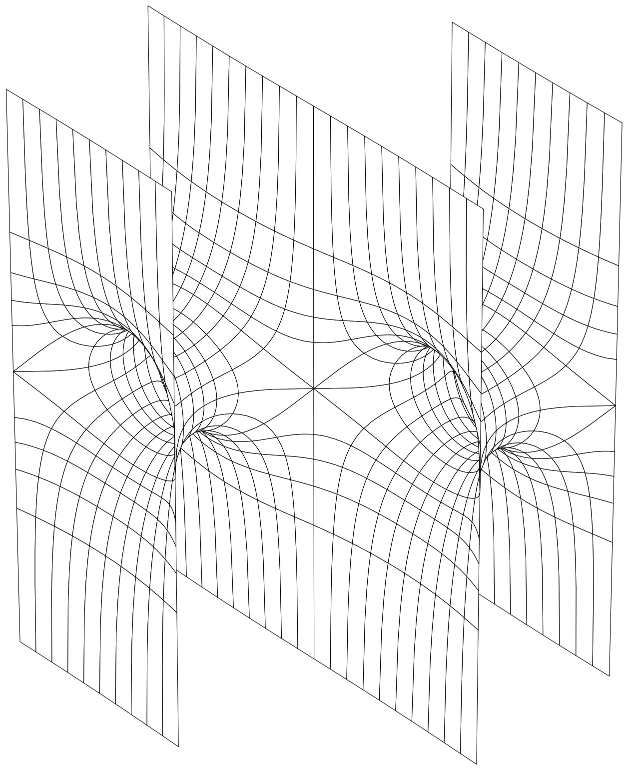


Abbildung 3.13: Translationsfundamentalbereich der konjugierten Fläche

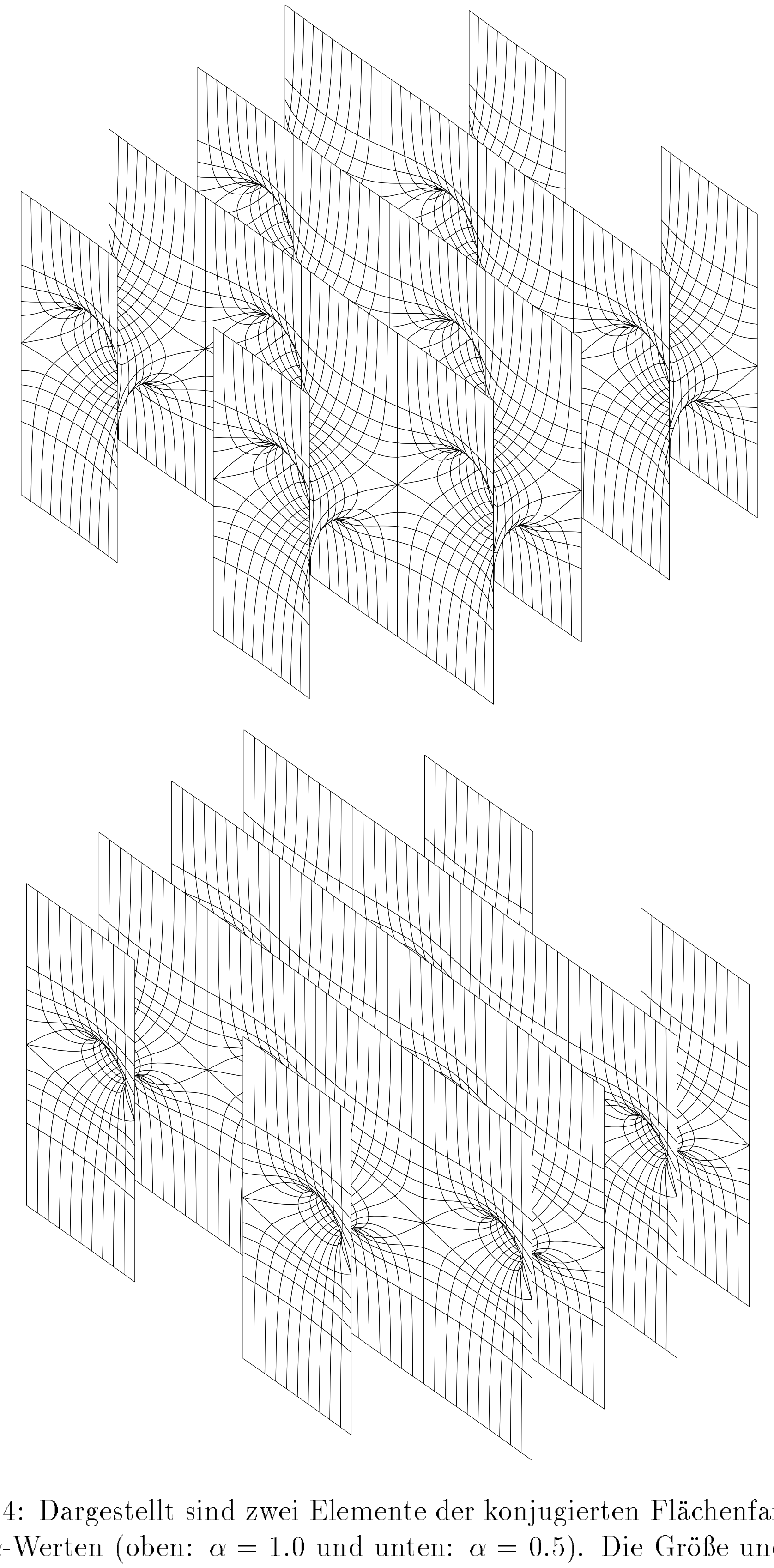


Abbildung 3.14: Dargestellt sind zwei Elemente der konjugierten Flächenfamilie zu unterschiedlichen α-Werten (oben: $\alpha = 1.0$ und unten: $\alpha = 0.5$). Die Größe und der Abstand benachbarter Henkel zueinander hängen von dem konformen Parameter α des Torus ab. Je kleiner α ist, desto weiter entfernt voneinander und kleiner im Durchmesser sind die Tunnel.

3.3 Zaun von weniger symmetrischen Satteltürmen mit Geraden

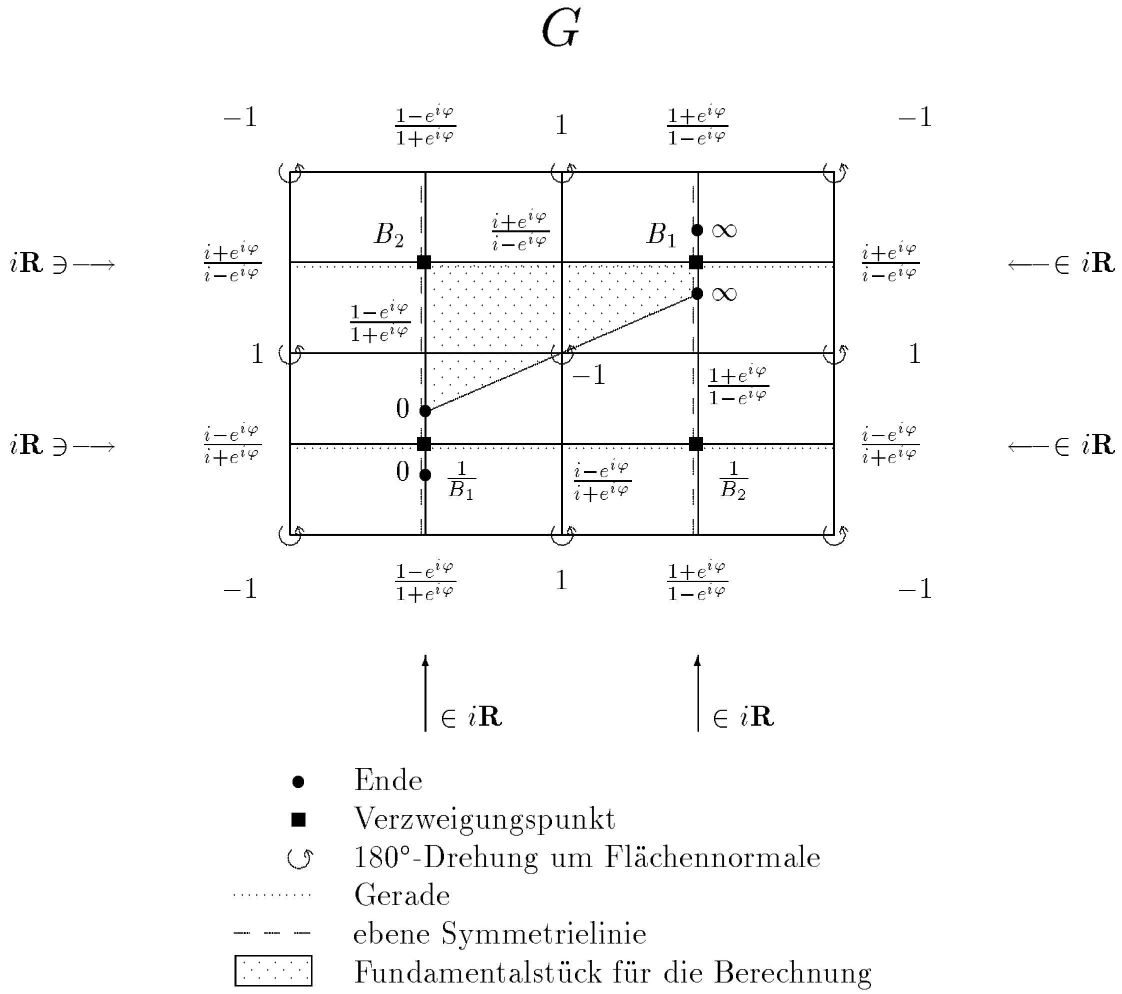
3.3.1 Weierstraßdaten und Parameter der Fläche

Hier verallgemeinern wir die Flächenschar des vorherigen Abschnitts, indem wir die Gaußabbildung G durch einen weiteren Parameter φ unsymmetrischer machen:

$$G = \frac{\mathcal{J}_D + e^{i\varphi}}{\mathcal{J}_D - e^{i\varphi}} \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \le \varphi \le \alpha \quad ,$$

$$B_1 = \frac{D + e^{i\varphi}}{D - e^{i\varphi}} = \frac{e^{i\alpha} + e^{i\varphi}}{e^{i\alpha} - e^{i\varphi}} \quad , \quad B_2 = \frac{-\frac{1}{D} + e^{i\varphi}}{-\frac{1}{D} - e^{i\varphi}} = \frac{e^{-i\alpha} - e^{i\varphi}}{e^{-i\alpha} + e^{i\varphi}} \quad .$$

Die Enden der Flächen sollen wieder an den Null- und Polstellen der Gaußabbildung liegen. Für $\varphi = 0$ entstehen die Flächen des Abschnitts 3.2.



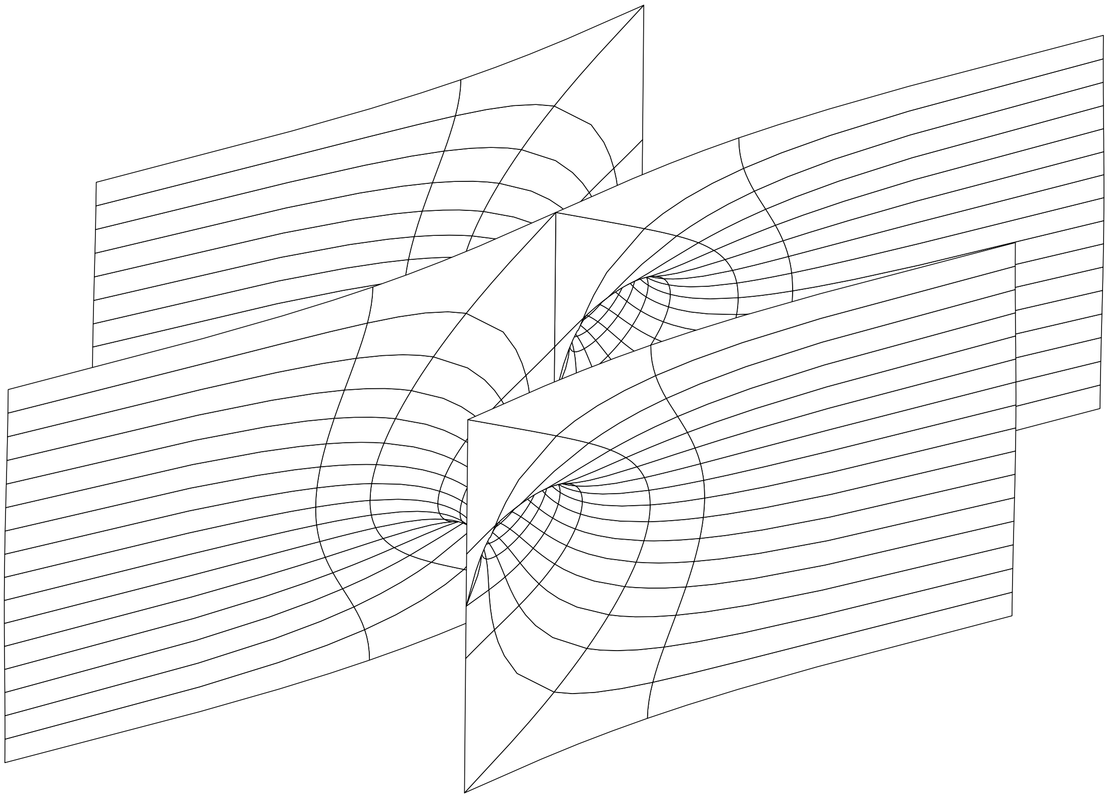


Abbildung 3.15: Translationsfundamentalbereich der Fläche

Im Fall $0 < \varphi < \alpha$ fehlen die Geraden durch die Enden und die Geraden, die für $\varphi = 0$ durch alle Türme laufen. Außerdem stehen die Enden nicht mehr senkrecht auf dem Zaun, d. h. die Normalen der Enden sind nicht mehr parallel zum Periodengitter. Zusätzlich haben sich die Tunnel so verändert, daß sie nun nicht mehr gleich groß sind, sondern daß abwechselnd jeweils ein kleiner und ein großer Tunnel aufeinander folgen, wenn man in der Satteltunrmrichtung entlang geht (siehe Bild 3.16 auf Seite 63). Als Symmetrielinien sind die ebenen Geodätischen durch die Enden erhalten geblieben sowie die Geraden, die die benachbarten Satteltürmblöcke verbinden. Hiervon ist der Name dieser Flächen in der Kapitelüberschrift abgeleitet.

Für den Fall, daß $\varphi = \alpha$ ist, erhält man die Riemannsche Minimalfläche (s. Abb. 3.22 S. 71, u. Abb. 3.23 S. 72). Diese Fläche hat die Funktion $i\wp_g$ als Gaußabbildung, wie man sofort erkennt, wenn man sich die Verzweigungswerte der obigen Gaußabbildung G und der Funktion $\wp_g$ (s. S. 11 u. S. 17) ansieht, und sie ist nur noch einfach periodisch, da die Enden keine Periode mehr erzeugen, weil durch jedes Ende der Riemannschen Minimalfläche eine ebene Geodätische und eine dazu senkrechte Gerade laufen (vergleiche Seite 29 und den Unterabschnitt 3.3.3 auf Seite 65). Den Grenzübergang $\varphi \longrightarrow \alpha$ kann man sich hierbei ähnlich wie den Grenzübergang vom Scherkschen Sattelturm zum Katenoid vorstellen (vgl. [16, Subsection 2.3.4]); denn die Riemannsche Minimalfläche sieht aus wie ein Zaun schräg übereinander gestapelter Katenoide. Allerdings hat diese Fläche ebene Enden und keine Katenoidenden.

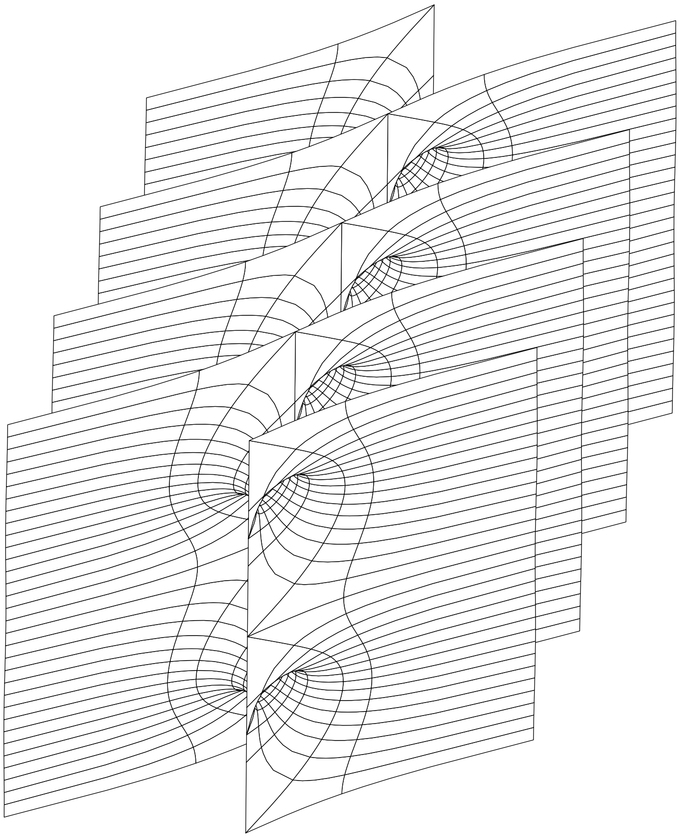


Abbildung 3.16: Zaun von weniger symmetrischen Satteltürmen mit Geraden

Die konjugierte Flächenschar ist natürlich eine Deformation der konjugierten Fläche des vorherigen Abschnitts in die Konjugierte der Riemannschen Minimalfläche (s. Abb. 3.19 S. 70). Die konjugierte Fläche der Riemannschen Minimalfläche ist wieder eine Riemannsche Minimalfläche, allerdings mit einem anderen Torusparameter, so wie es auch bei den Flächen aus Abschnitt 3.1 der Fall ist.

Im folgenden wird die Flächenfamilie nur noch für $0 \leq \varphi < \alpha$ betrachtet, weil dann alle Elemente der Schar zweifach periodisch sind. In Bild 3.15 auf Seite 62 ist der Translationsfundamentalbereich der Fläche dargestellt; ein Achtel von ihm ist ein Fundamentalstück für die Berechnung der Fläche. Das Fundamentalstück dieser Minimalflächen ist doppelt so groß wie das der in den vorherigen Abschnitten betrachteten, da jetzt weniger Symmetrien auf den Flächen vorhanden sind. Außerdem ist das Urbild des Fundamentalstücks auf dem Torus für $\varphi > 0$ kein Rechteck mehr.

Da die Gaußabbildung G außer in den Enden der Fläche keine Null- oder Polstellen hat, muß für das Differential der Höhenfunktion wieder gelten: $dh = const \cdot dz$. Auch hier ergibt sich i als Konstante, damit die Fläche die gewünschten Symmetrien hat, die im nächsten Abschnitt nachgerechnet werden;

$$dh = i \cdot dz = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_D}{\mathcal{J}_D{}'} \quad .$$

3.3.2 Symmetrien

Nun weisen wir wieder nach, daß die Fläche tatsächlich die angegebenen Symmetrien hat. Hierzu betrachte man die Skizze der obigen Gaußabbildung $G = (\mathcal{J}_D + e^{i\varphi})/(\mathcal{J}_D - e^{i\varphi})$ und die der Jacobi-Funktion $\mathcal{J}_D$ auf Seite 40. Wegen

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{J}_D + e^{i\varphi}}{\mathcal{J}_D - e^{i\varphi}} &= \frac{\Re(\mathcal{J}_D) + i\Im(\mathcal{J}_D) + \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)}{\Re(\mathcal{J}_D) + i\Im(\mathcal{J}_D) - \cos(\varphi) - i\sin(\varphi)} \\ &= \frac{|\mathcal{J}_D|^2 - 1 \;+\; i \cdot 2\left(\Re(\mathcal{J}_D)\sin(\varphi) - \Im(\mathcal{J}_D)\cos(\varphi)\right)}{\left(\Re(\mathcal{J}_D) - \cos(\varphi)\right)^2 + \left(\Im(\mathcal{J}_D) - \sin(\varphi)\right)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{gilt} \qquad & \frac{\mathcal{J}_D + e^{i\varphi}}{\mathcal{J}_D - e^{i\varphi}} \in \mathbf{R} \iff \mathcal{J}_D \in \mathbf{R} \cdot e^{i\varphi} \\ \text{und} \qquad & \frac{\mathcal{J}_D + e^{i\varphi}}{\mathcal{J}_D - e^{i\varphi}} \in i\mathbf{R} \iff \mathcal{J}_D \in \mathbf{S}^1 \quad .\end{aligned}$$

Jetzt muß wiederum gezeigt werden, daß die Metrik ds bei analytischer Reflexion an den entsprechenden Linien invariant ist. $\sigma(t)$ bezeichne wie im letzten Abschnitt jeweils die entsprechende Linie. $G(\sigma(t))$ hat für alle vier markierten Linien Werte ganz in $i\mathbf{R}$, weil $\mathcal{J}_D$ entlang dieser Linien Werte aus $\mathbf{S}^1$ annimmt. Das bedeutet, daß die Bilder der Linien in einem Meridian von $\mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}}$ enthalten sind. Deshalb bleibt $(|G| + 1/|G|)$ invariant bei analytischer Reflexion an diesen Linien (s. Satz 2.8 S. 26). Für dh gilt genau das gleiche wie im ersten Abschnitt dieses Kapitels (s. S. 42ff.). Damit ist gezeigt, daß die Metrik ds bei analytischer Reflexion an den Linien aus der Skizze der Gaußabbildung invariant ist. Jetzt müssen wir wieder untersuchen, ob die Linien Geraden oder ebene Geodätische sind.

Für die markierten Linien gilt:

$$\begin{aligned} G(\sigma) \in i\mathbf{R}\ , \quad \text{d. h.} \quad & G(\sigma) \text{ ist ein Meridian von } \mathbf{S}^2 = \hat{\mathbf{C}} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{dG}{G} \in \mathbf{R} \quad . \end{aligned}$$

Deshalb folgt für die waagerechten, gepunkteten Linien:

$$\frac{dG}{G} \cdot dh \in i\mathbf{R} \quad ,$$

das bedeutet, daß diese Linien **Geraden** auf der Fläche sind (s. Satz 2.5 S. 25).

Für die senkrechten, gestrichelten Linien folgt:

$$\frac{dG}{G} \cdot dh \in \mathbf{R} \quad ,$$

das bedeutet, daß diese Linien **ebene Geodätische** auf der Fläche sind.

Damit sind jetzt alle Symmetrienlinien der Fläche nachgerechnet. Zusätzlich ist um die Normalen in ± 1-Richtung eine $180°$-Normalenrotation wie bei den beiden vorherigen Flächenfamilien möglich.

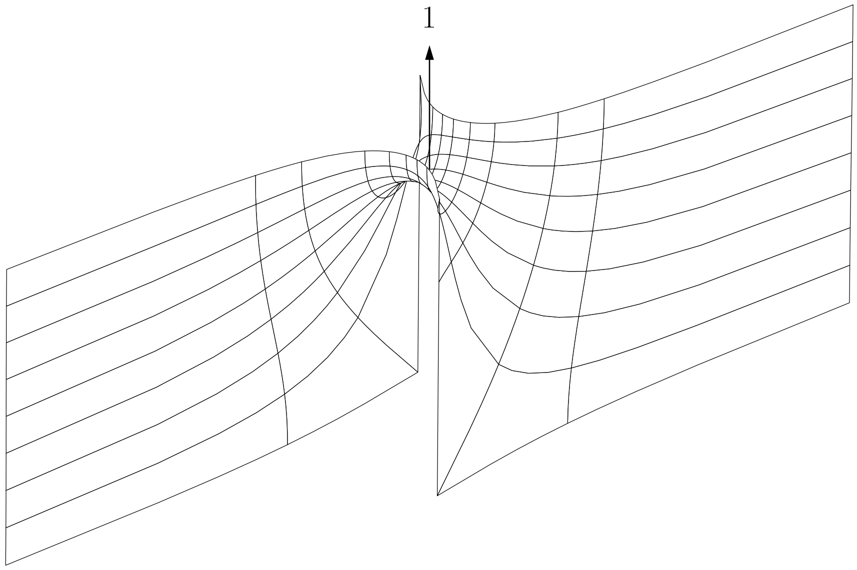


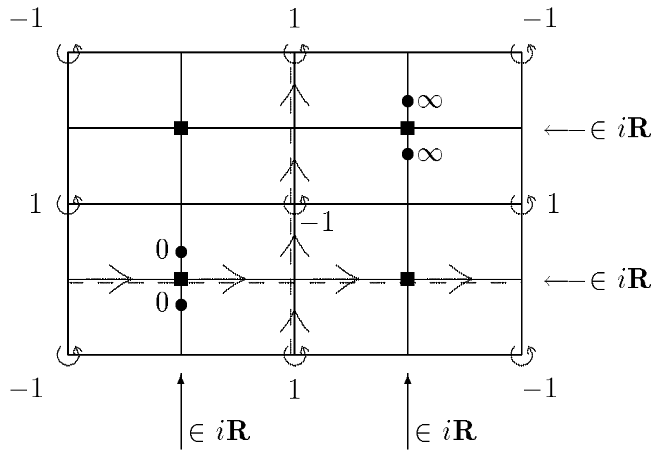
Abbildung 3.17: Viertel Fundamentalbereich der Fläche, dessen Fundamentalstück schattiert ist; seine zweite Hälfte ist durch 180°-Rotation um die 1-Normale entstanden.

3.3.3 Perioden

Hier und in Unterabschnitt 3.4.2 werden die Perioden der Fläche und ihrer Konjugierten nacheinander untersucht. Daher werden zuerst nur die Real- und später nur die Imaginärteile der Perioden betrachtet.

P_1 entsteht durch Integration entlang

P_2 entsteht durch Integration entlang



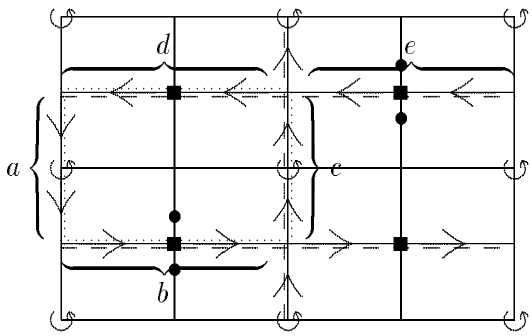
Wichtig für die weiteren Überlegungen ist die Tatsache, daß die Geraden und die Normalen der Fläche, um die um 180° rotiert werden kann, parallel sind; sie zeigen nämlich alle in ± 1-Richtung, d. h. in x-Richtung. Außerdem wird ausgenutzt, daß die Gaußabbildung vom Abbildungsgrad 2 ist.

Zunächst betrachten wir den Weg auf dem Torus, durch den die Periode P_1 entsteht. Da auf diesem Weg vier parallele Drehachsen liegen, muß durch ihn eine Periode $\Re(P_1) \neq 0$ erzeugt werden. Diese Periode ist natürlich senkrecht zur ± 1-Richtung, sie liegt also in der y-z-Ebene. $\Re(P_1)$ ist die Periode zwischen benachbarten Sattelturmblöcken.

Die Periode $\Re(P_2)$ hat die Länge und die Richtung des einen Geradenstücks, sie geht also in x-Richtung. Die andere Gerade hat auf Grund der Normalenrotationssymmetrie die gleiche Länge. $\Re(P_2)$ ist die Sattelturmperiode.

Nun müssen noch die Perioden, die bei Integration um die Enden entstehen können, untersucht werden. Zuerst stellt man fest, daß alle Perioden um die Enden aus Symmetriegründen gleich sind; denn durch die 180°-Normalen- und Geradendrehungen lassen sich alle Enden und damit auch ihre Perioden aufeinander abbilden.

Es wird nun gezeigt, daß der Realteil der Periode um ein Ende gleich der Periode $\Re(P_2)$ ist. Man betrachte hierzu den gepunkteten Integrationsweg.



Wegen der Rotationssymmetrien gilt: $\Re\int_c d\Psi = \frac{1}{2}\Re(P_1)$.

Da $\Re(P_1)$ parallel zur Symmetrieebene der ebenen Geodätischen ist, gilt:

$$\Re\int_a d\Psi = -\frac{1}{2}\Re(P_1) \quad .$$

Weiter gilt: $\Re\int_b d\Psi = \kappa \cdot \Re(P_2)$, wobei $0 < \kappa < 1$ und κ unbekannt, aber fest ist.

Da $\Re(P_2)$ parallel zur 180°-Rotations-Normalen ist, gilt: $\Re\int_b d\Psi = \Re\int_e d\Psi = \kappa \cdot \Re(P_2)$,

außerdem gilt deshalb: $\Re(P_2) = \Re \int_{\textit{untere gestrichelte Linie}} d\Psi = \Re \int_{\textit{obere gestrichelte Linie}} d\Psi$

$$\Longrightarrow \quad \Re\int_d d\Psi = (1-\kappa)\cdot\Re(P_2) \quad \Longrightarrow \quad \Re\int_b d\Psi + \Re\int_d d\Psi = \Re(P_2)$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Realteil der Periode um ein Ende } = \Re\int_{a+b+c+d} d\Psi = \Re(P_2) \quad .$$

Damit ist gezeigt, daß die Flächenfamilie zweifach periodisch ist. Daß diese Flächenschar nun auch tatsächlich eingebettet ist, wird in Unterabschnitt 3.5.3 auf Seite 88 gezeigt.

Um die Perioden der Konjugierten zu untersuchen, betrachte man wieder die beiden obigen Skizzen und beachte, daß die Geraden und ebenen Geodätischen jetzt vertauscht sind. Zunächst stellt man fest, daß $\Im(P_1) = 0$ gilt, weil das Bild des Integrationswegs sowohl spiegelsymmetrisch zur y-z-Ebene, als auch rotationssymmetrisch zur x-Achse ist. Weiter bemerkt man, daß die Periode $\Im(P_2)$ in der y-z-Ebene liegt und wegen der Punktspiegelung an den Verzweigungspunkten $\Im(P_2) \neq 0$ gilt.

$$\text{Obwohl } \Im(P_1) = 0 \text{ ist, gilt:} \qquad \Im \int_c d\Psi \neq 0 \quad ,$$

weil keine Verzweigungspunkte der Gaußabbildung auf dem Integrationsweg liegen. Außerdem muß auf Grund der Spiegelsymmetrien und der Tatsache, daß $\Im(P_1) = 0$ ist, gelten:

$$\Im \int_c d\Psi \in y\text{-}z\text{-Ebene} \quad .$$

$$\text{Deshalb gilt wegen der Geradenrotation diesmal:} \qquad \Im \int_a d\Psi = \Im \int_c d\Psi \quad .$$

$$\text{Wegen der Normalensymmetrie gilt wieder:} \qquad \Im \int_b d\Psi = \Im \int_e d\Psi$$

$$\Longrightarrow \quad \Im \int_b d\Psi + \Im \int_d d\Psi = \Im(P_2) \quad ,$$

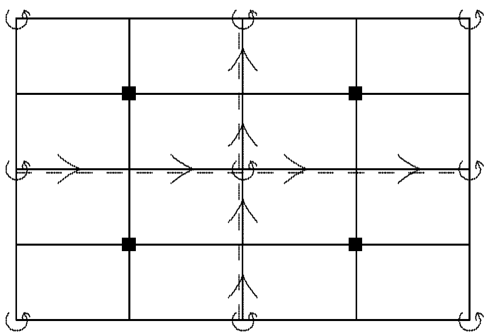
$$\Longrightarrow \quad \text{Imaginärteil der Periode um ein Ende } = \Im \int_{a+b+c+d} d\Psi = 2\,\Im \int_a d\Psi + \Im(P_2) \quad .$$

Hiermit ist gezeigt, daß auch die konjugierte Familie zweifach periodisch ist.

Für den Grenzfall der Riemannschen Minimalfläche ergibt sich, wie oben schon erwähnt, eine einfach periodische Flächenschar. Um dies einzusehen, betrachte man die folgende Skizze und die der Gaußabbildung auf Seite 61.

P_1 entsteht durch Integration entlang $\Uparrow$

P_2 entsteht durch Integration entlang $\Rightarrow$



Die Periode $\Re(P_1)$ liegt in der y-z-Ebene, und es gilt $\Re(P_1) \neq 0$, weil auf dem Weg, durch den P_1 entsteht, vier parallele Drehachsen in x-Richtung liegen. Da der Realteil des Bildes des Integrationswegs von P_2 sowohl spiegelsymmetrisch zur y-z-Ebene, als auch

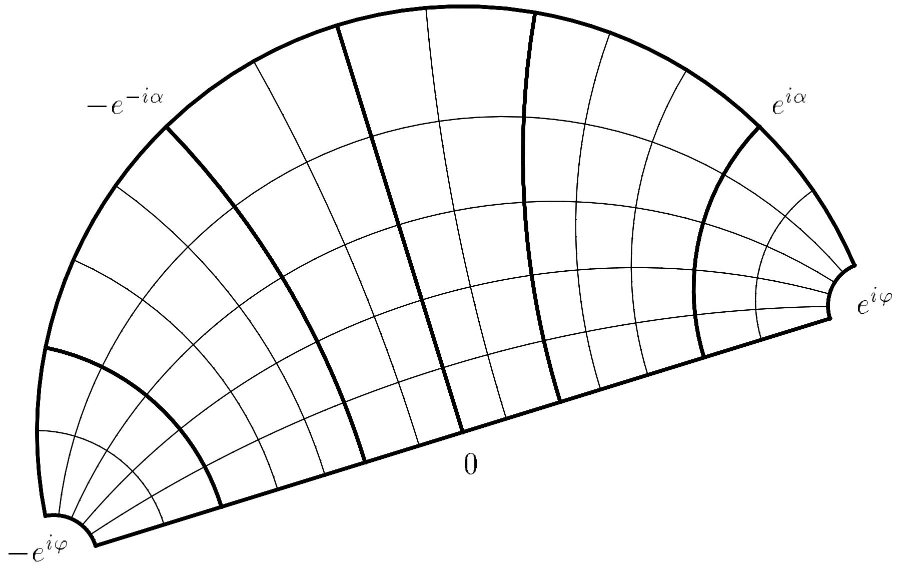
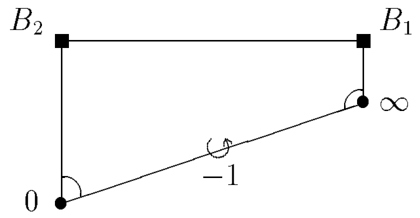


Abbildung 3.18: Aus sechs Parts bestehender Parameterbereich des Fundamentalstücks

rotationssymmetrisch zur x-Achse ist, muß $\Re(P_2) = 0$ gelten. Die Perioden um die Enden sind ebenfalls gleich null, weil durch jedes Ende eine ebene Geodätische und eine hierzu senkrechte Gerade laufen. Daher ist die Riemannsche Minimalfläche einfach periodisch.

3.3.4 Parametrisierung

Die Weierstraßdaten $G = (\mathcal{J}_D + e^{i\varphi})/(\mathcal{J}_D - e^{i\varphi})$ und $dh = i \cdot dz$ müssen über das nebenstehende Fundamentalstück auf dem Torus integriert werden:

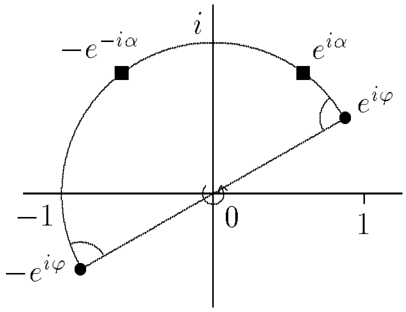


Wie zuvor verwenden wir $\mathcal{J}_D$ als lokale Koordinate und schreiben

$$G = \frac{\mathcal{J}_D + e^{i\varphi}}{\mathcal{J}_D - e^{i\varphi}} \quad \text{und} \quad dh = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_D}{\mathcal{J}_D'}$$

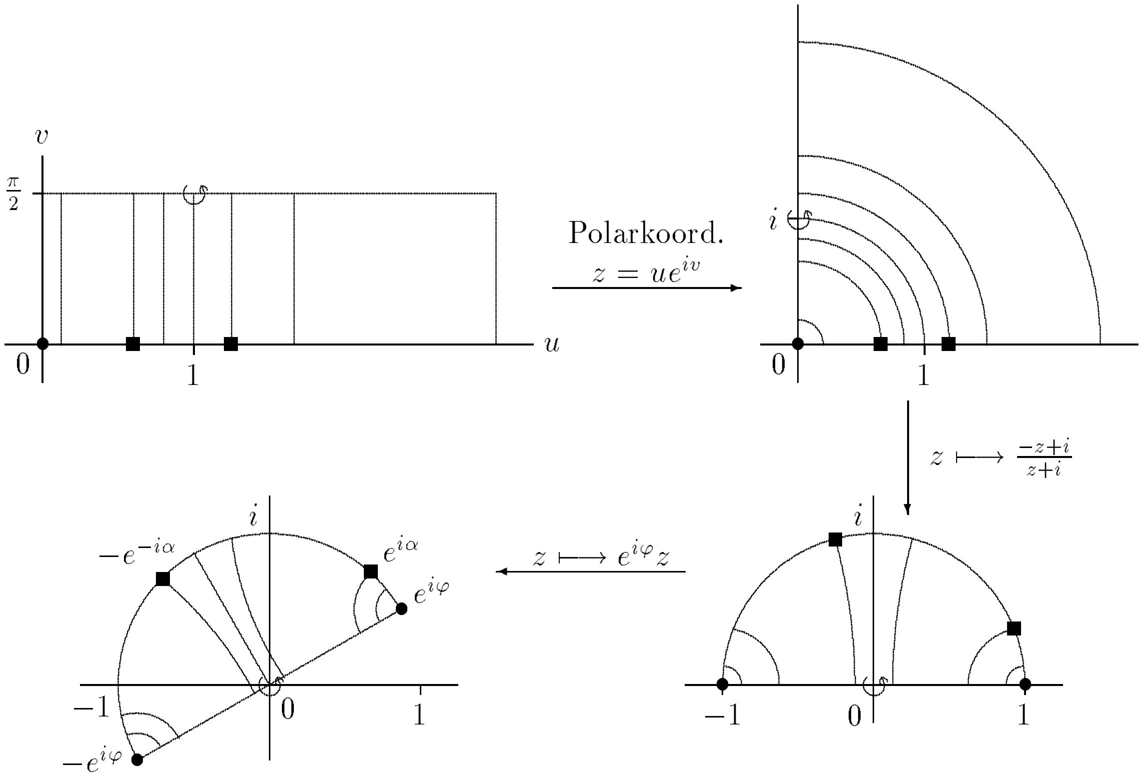
mit $(\mathcal{J}_D')^2 = \mathcal{J}_D{}^4 - 2\cos(2\alpha) \cdot \mathcal{J}_D{}^2 + 1$ (siehe hierzu (1.25) auf Seite 17)

und integrieren über das Bild des Fundamentalstücks bzgl. der Karte $\mathcal{J}_D$:



Da der Punkt, um dessen Normale rotiert werden kann, an einer Ecke eines Teilstücks des Fundamentalstücks liegen muß, weil die Verzweigungspunkte bei der Integration besonders behandelt werden müssen und da die Verteilung der Parameterlinien möglichst gleichmäßig sein soll, benötigt man sechs Unterteilungen des Fundamentalstücks.

Auch hier sollen die Parameterlinien auf der Fläche so verlaufen, daß Polarkoordinatenzentren in den Enden liegen. Außerdem sollen sich die Linien in allen Punkten der Fläche mit Ausnahme der Verzweigungspunkte senkrecht schneiden. Dies gelingt durch folgende Komposition von Abbildungen:



Wieder beginnt man mit einem rechteckige Gitter aus horizontalen und vertikalen Linien. Danach wird das Rechteck durch die Polarkoordinatenabbildung $(u,v) \longmapsto z = ue^{iv}$ auf das obere rechte Viertel der komplexen Ebene abgebildet. Als nächstes bildet die Möbiustransformation $z \longmapsto (-z-i)/(z+i)$ dieses Stück der Ebene auf ein Halbkreissegment ab. Schließlich wird das Halbkreissegment durch die Abbildung $z \longmapsto e^{i\varphi}z$ um den Winkel φ um den Ursprung gedreht.

Auch bei dieser Parametrisierung hat man auf dem Kreissegment noch überall orthogonale Parameterlinien, weil das Polarkoordinatenzentrum ja im Ende der Fläche liegt. Deshalb erhalten wir außer in den Verzweigungspunkten auf der Minimalfläche orthogonale Parameterlinien. Die ebenen Geodätischen und die Geraden auf der Fläche sind natürlich auch wieder als Parameterlinien vorhanden.

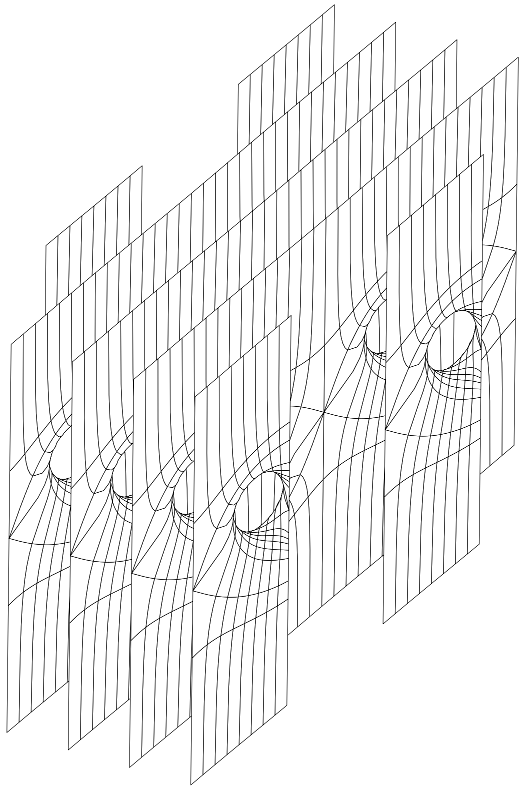


Abbildung 3.19: Konjugierter Zaun von weniger symmetrischen Satteltürmen

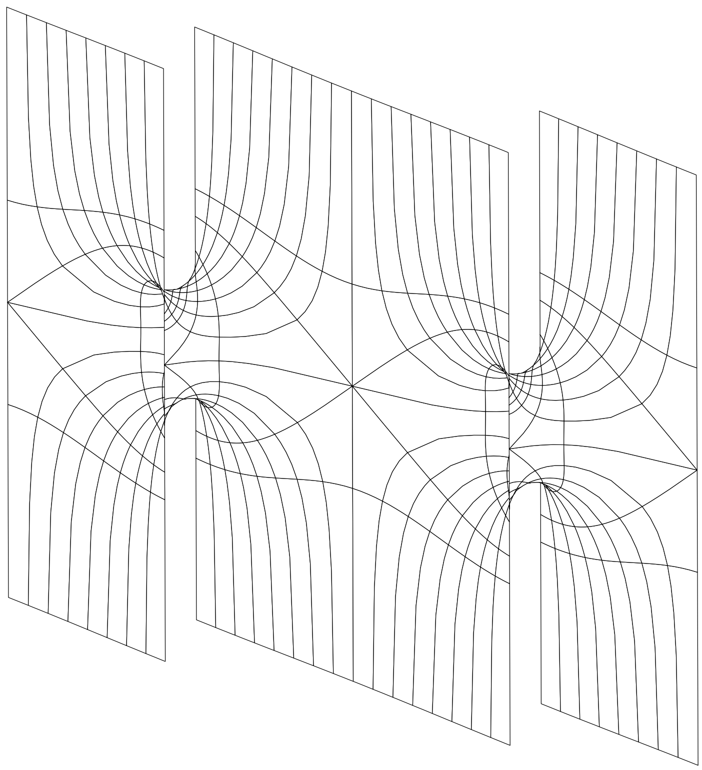


Abbildung 3.20: Translationsfundamentalbereich der Konjugierten

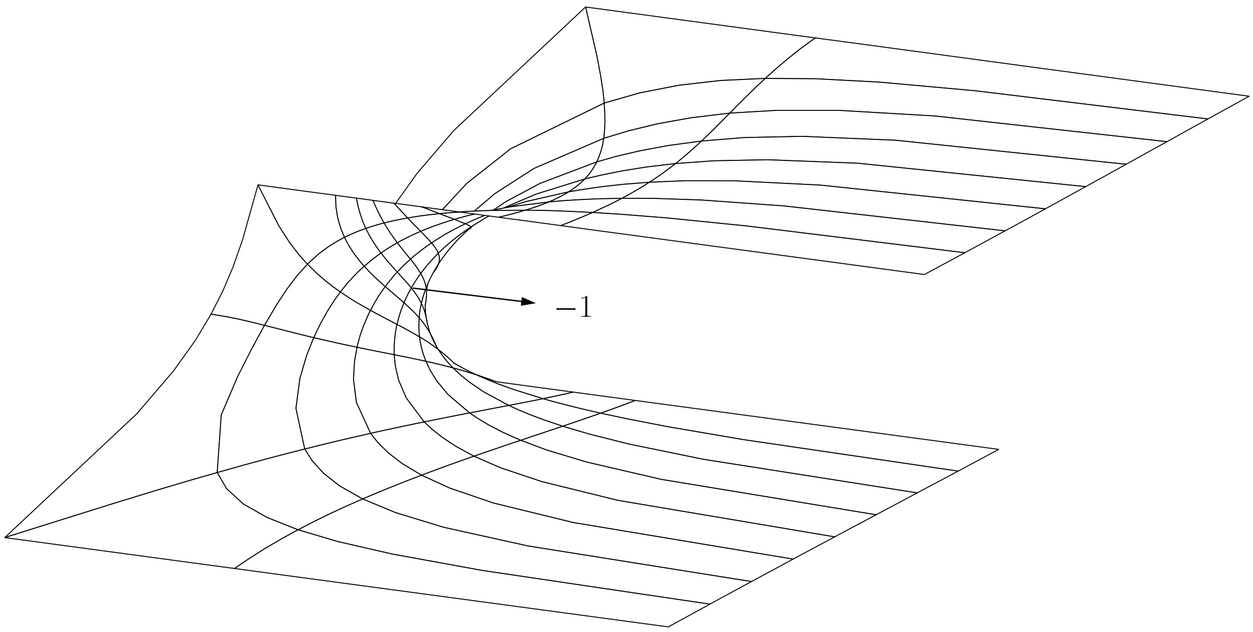


Abbildung 3.21: Viertel Fundamentalbereich der Konjugierten, ihr Fundamentalstück ist schattiert und um die eingezeichnete Normale ist um 180° gedreht worden.

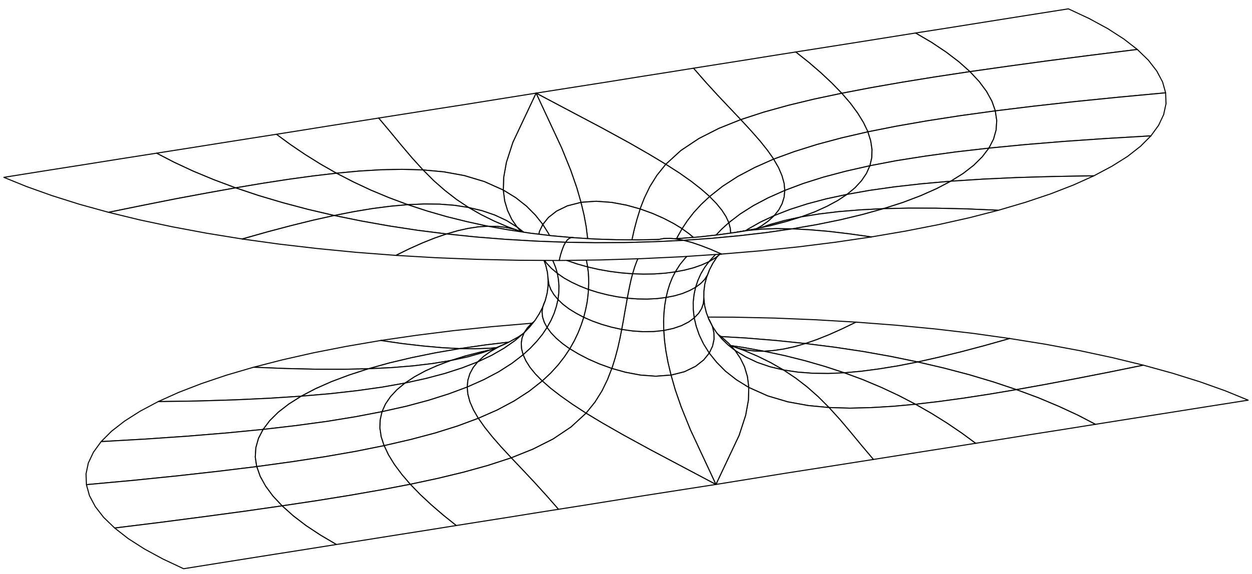


Abbildung 3.22: Halber Fundamentalbereich der Riemannschen Minimalfläche, für deren Parameter $\alpha = \varphi = \pi/4$ gilt, ihr Fundamentalstück ist schattiert.

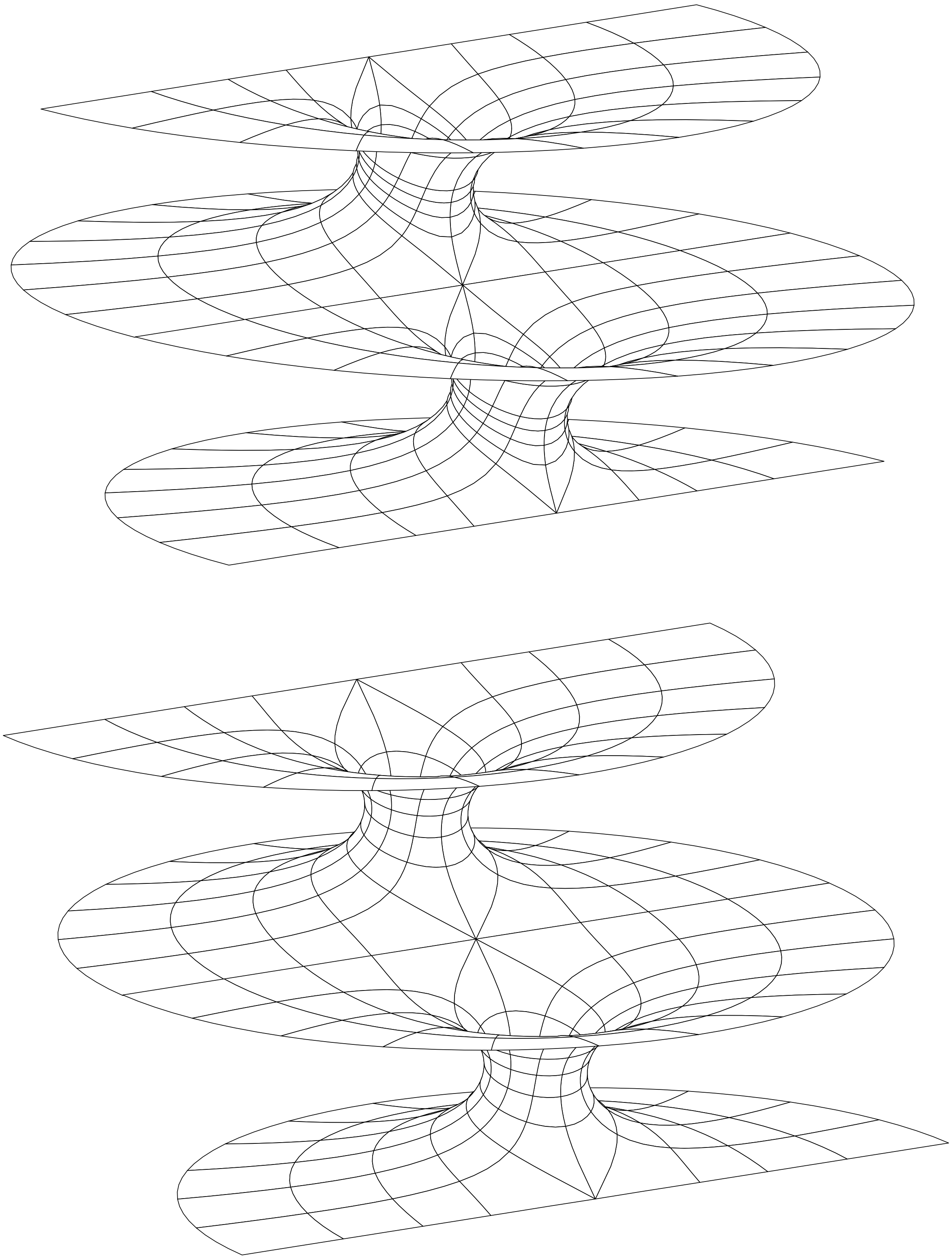


Abbildung 3.23: Zu sehen sind zwei Riemannsche Minimalflächen auf unterschiedlichen Tori (oben: $\alpha = \varphi = 1.2$ und unten: $\alpha = \varphi = \pi/4$). Je größer α ist, desto stärker sind übereinanderstehende „Katenoide“ gekippt.

3.4 Zaun von symmetrischen Satteltürmen

3.4.1 Weierstraßdaten, Parameter und Symmetrien

In diesem Abschnitt wird eine 2-Parameter Schar zweifach periodischer Minimalflächen konstruiert, die die Familie des ersten Abschnitts in die des zweiten deformiert. Diese Schar besitzt neben dem konformen Parameter α den Parameter ε, für den $0 \leq \varepsilon \leq 1$ gilt. Im Fall $\varepsilon = 0$ ergibt sich die Flächenfamilie des Abschnitts 3.1, für $\varepsilon = 1$ erhält man die Schar aus Abschnitt 3.2. Im Fall $0 < \varepsilon < 1$ enthalten die Flächen keine Symmetrielinien mehr zwischen benachbarten Satelturmblöcken (siehe Bild 3.25 auf Seite 78). Die Geraden durch die Scherk-Enden sind aber bei allen Flächen dieser Schar vorhanden, und die Enden stehen senkrecht auf dem Periodengitter. Wenn ε von 0 nach 1 läuft, sieht es so aus, als ob die benachbarten Scherk-Türme aneinander vorbeirutschen (betrachte Abbildung 3.27 auf Seite 79). Die Gaußabbildung G der Familie ist auf der nächsten Seite dargestellt, wobei die gleichen Bezeichnungen Verwendung finden wie in den vorherigen Skizzen der Gaußabbildungen, und sie lautet:

$$G = \frac{\mathcal{J}_D + \varepsilon}{\varepsilon \mathcal{J}_D - 1} \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1 \quad ,$$

$$B = \frac{D + \varepsilon}{\varepsilon D - 1} = \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}} + \varepsilon e^{-i\frac{\alpha}{2}}}{\varepsilon e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}} \quad .$$

Da die Gaußabbildung G außer in den vier Enden der Fläche keine Null- oder Polstellen hat, muß für das Differential der Höhenfunktion wieder gelten: $dh = const \cdot dz$. Wiederum wählen wir i als Konstante, damit die Fläche für $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 1$ die gewünschten Symmetrien besitzt. Wenn $0 < \varepsilon < 1$ gilt, bleiben diejenigen Symmetrien erhalten, die auf beiden Randfamilien gleichzeitig vorhanden sind;

$$dh = i \cdot dz = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_D}{\mathcal{J}_D{}'} \quad .$$

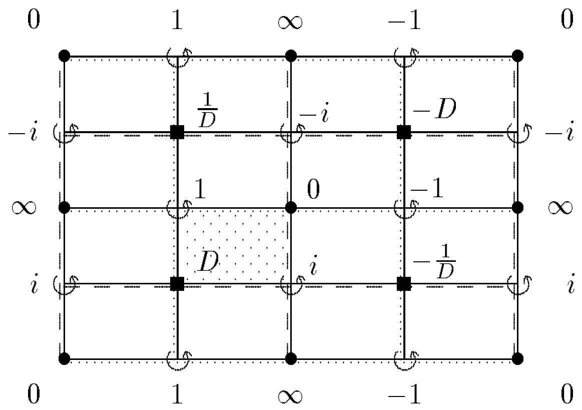
Die konjugierte Flächenfamilie ist natürlich eine Interpolation zwischen der Konjugierten des Abschnitts 3.1 und der des Abschnitts 3.2 (vergleiche die Abbildungen 3.31, 3.30 und 3.29).

In Bild 3.26 auf Seite 78 ist der Translationsfundamentalbereich der Fläche dargestellt; ein Achtel von ihm ist ein Fundamentalstück für die Berechnung der Fläche (s. Abb. 3.28 S. 80). Da diese Flächen weniger Symmetrien enthalten als die in den beiden ersten Abschnitten betrachteten Flächen, ist das Fundamentalstück dieser Minimalflächen jetzt doppelt so groß.

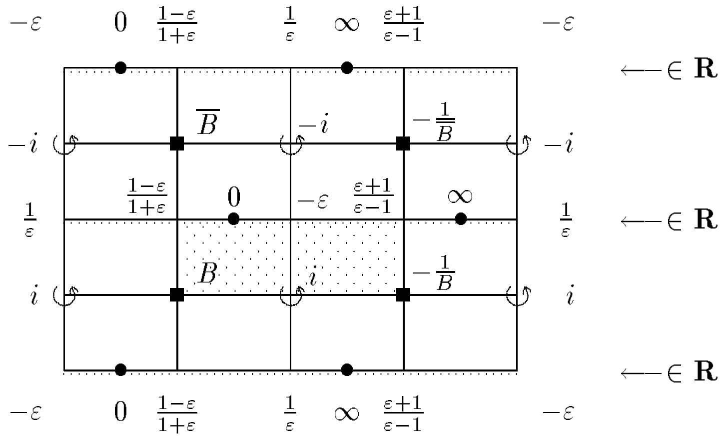
3.4.2 Perioden

Für die weitere Argumentation ist die Tatsache wichtig, daß die Geraden und die Normalen, um die um 180° gedreht werden kann, parallel zueinander sind; denn sie zeigen alle in die

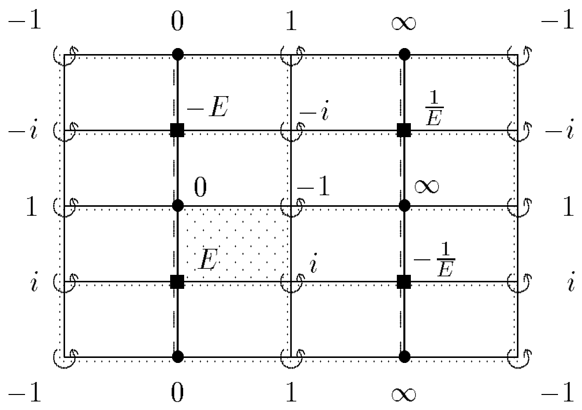
$-\mathcal{J}_D$



$$\frac{\mathcal{J}_D+\varepsilon}{\varepsilon\mathcal{J}_D-1}$$



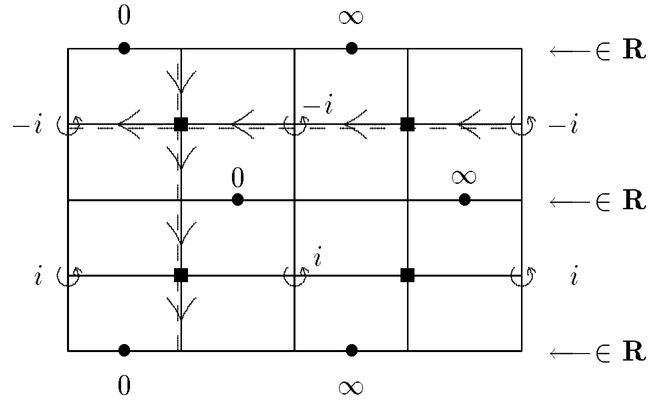
$$\frac{\mathcal{J}_D+1}{\mathcal{J}_D-1}$$



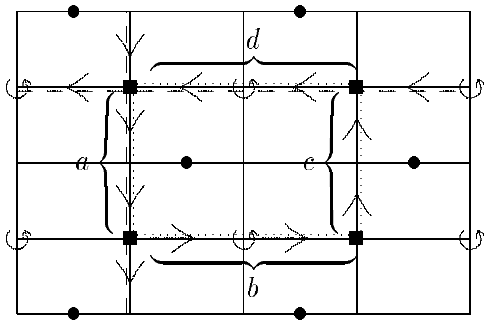
$\pm i$-Richtung, d. h. in y-Richtung. Als weitere Symmetrie ist noch die Punktspiegelung an den Verzweigungspunkten zu nennen. Aus diesen Überlegungen folgt, daß alle auftretenden Perioden in der x-z-Ebene liegen müssen und daß sowohl $\Re(P_1)$ als auch $\Re(P_2)$ ungleich null sind.

P_1 entsteht durch Integration entlang $\Downarrow$

P_2 entsteht durch Integration entlang $\Leftarrow$



Als nächstes untersuchen wir jetzt die Perioden, die bei der Integration um die Enden entstehen können. Dabei stellt man fest, daß alle Perioden um die Enden aus Symmetriegründen gleich sind, weil sich alle Enden durch die Punktspiegelung und die Normalenrotation aufeinander abbilden lassen. Es wird nun gezeigt, daß der Realteil der Periode um ein beliebiges Ende gleich $\Re(P_2)$ und ungleich $\Re(P_1)$ ist. Man betrachte hierzu den gepunkteten Integrationsweg in der folgenden Skizze.



Auf Grund der Symmetrien gilt $\quad \Re\int_a d\Psi = \frac{1}{2}\Re(P_1) \quad$ und $\quad \Re\int_d d\Psi = \frac{1}{2}\Re(P_2)$.

Da $\Re(P_1)$ und $\Re(P_2)$ senkrecht zu den Drehachsen sind, gilt

wegen der Normalenrotation $\quad \Re\int_c d\Psi = -\frac{1}{2}\Re(P_1)$

und wegen der Geradendrehung $\quad \Re\int_b d\Psi = \frac{1}{2}\Re(P_2)$,

$$\Longrightarrow \quad \text{Realteil der Periode um ein Ende} \; = \Re \int\limits_{a+b+c+d} d\Psi \; = \; \Re(P_2) \; \neq \; \Re(P_1) \quad .$$

Damit ist gezeigt, daß die Flächenschar tatsächlich zweifach periodisch ist. Die Periode $\Re(P_1)$ ist die Periode zwischen benachbarten Scherk-Türmen und $\Re(P_2)$ die ursprüngliche Sattelturmperiode.

Um die Perioden der konjugierten Flächenfamilie zu untersuchen, betrachte man wiederum die beiden vorherigen Skizzen und bedenke, daß statt der Geraden jetzt ebene Geodätische auf den Flächen liegen, die parallel zur x-z-Ebene verlaufen. Hieraus folgt, daß die Periode $\Im(P_1)$ in y-Richtung verläuft und ungleich null ist. Die Periode $\Im(P_2)$ liegt wie zuvor in der x-z-Ebene und ist ebenfalls nicht null.

Auf Grund der Symmetrien gilt wieder $\Im \int\limits_a d\Psi = \frac{1}{2}\Im(P_1)$ und $\Im \int\limits_d d\Psi = \frac{1}{2}\Im(P_2)$.

Weil $\Im(P_1)$ parallel zu der Drehachse der Normalenrotation ist, gilt $\Im \int\limits_c d\Psi = \frac{1}{2}\Im(P_1)$.

Da $\Im(P_2)$ parallel zu der Spiegelebene der Geodätischen ist, gilt $\Im \int\limits_b d\Psi = -\frac{1}{2}\Im(P_2)$.

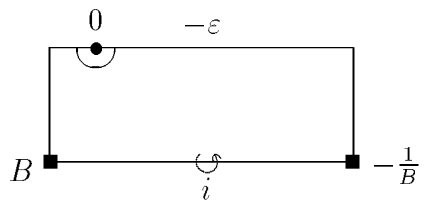
$$\Longrightarrow \quad \text{Imaginärteil der Periode um ein Ende} \;=\; \Im \int\limits_{a+b+c+d} d\Psi \;=\; \Im(P_1) \;\neq\; \Im(P_2) \quad .$$

Hiermit ist bewiesen, daß die konjugierte Schar ebenfalls zweifach periodisch ist.

Auch von diesen Flächenfamilien wird in Unterabschnitt 3.5.3 auf Seite 88 gezeigt, daß sie eingebettet sind.

3.4.3 Parametrisierung

Die Weierstraßdaten $G = (\mathcal{J}_D + \varepsilon)/(\varepsilon\mathcal{J}_D - 1)$ und $dh = i \cdot dz$ müssen über das nebenstehende Fundamentalstück auf dem Torus integriert werden:

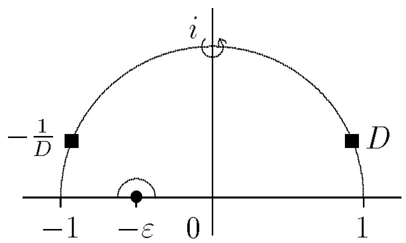


Wiederum benutzen wir $\mathcal{J}_D$ als lokale Koordinate und schreiben

$$G = \frac{\mathcal{J}_D + \varepsilon}{\varepsilon\mathcal{J}_D - 1} \quad \text{und} \quad dh = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_D}{\mathcal{J}_D{}'}$$

mit $(\mathcal{J}_D{}')^2 = \mathcal{J}_D{}^4 - 2\cos(2\alpha) \cdot \mathcal{J}_D{}^2 + 1$ (siehe hierzu (1.25) auf Seite 17)

und integrieren über das Bild der Karte $\mathcal{J}_D$ des Fundamentalstücks in $\mathbf{C}$:



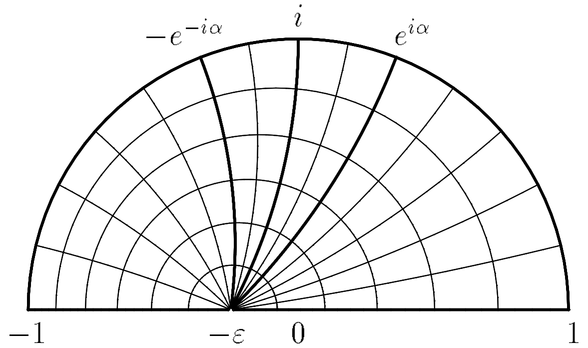
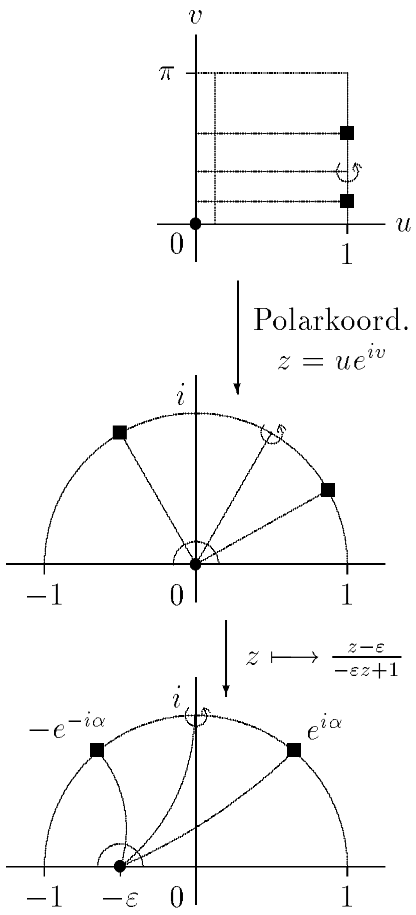


Abbildung 3.24: Aus vier Parts bestehender Parameterbereich des Fundamentalstücks

Auf Grund der Normalenrotation und der Verzweigungspunkte benötigen wir vier Unterteilungen des Fundamentalstücks, so daß die Symmetriepunkte an Ecken dieser Teilstücke liegen.

Auch hier sollen die Parameterlinien auf der Fläche so verlaufen, daß Polarkoordinatenzentren in den Enden liegen. Außerdem sollen sich die Linien in allen Punkten der Fläche mit Ausnahme der Verzweigungspunkte senkrecht schneiden. Dies gelingt durch folgende Komposition von Abbildungen:

Zunächst erzeugt man das nebenstehende rechteckige Gitter aus horizontalen und vertikalen Linien. Daraufhin wird das Rechteck durch die Polarkoordinatenabbildung $(u, v) \longmapsto z = ue^{iv}$ auf ein Halbkreissegment abgebildet. Schließlich bildet die Möbiustransformation $z \longmapsto (z-\varepsilon)/(-\varepsilon z+1)$ das Kreissegment auf ein anderes Halbkreissegment ab.
Auch bei dieser Parametrisierung hat man auf dem Kreissegment noch überall orthogonale Parameterlinien, weil das Polarkoordinatenzentrum ja im Ende der Fläche liegt. Deshalb erhalten wir außer im Verzweigungspunkt auf der Minimalfläche orthogonale Parameterlinien.
Die Geraden auf der Fläche sind natürlich auch wieder als Parameterlinien vorhanden.



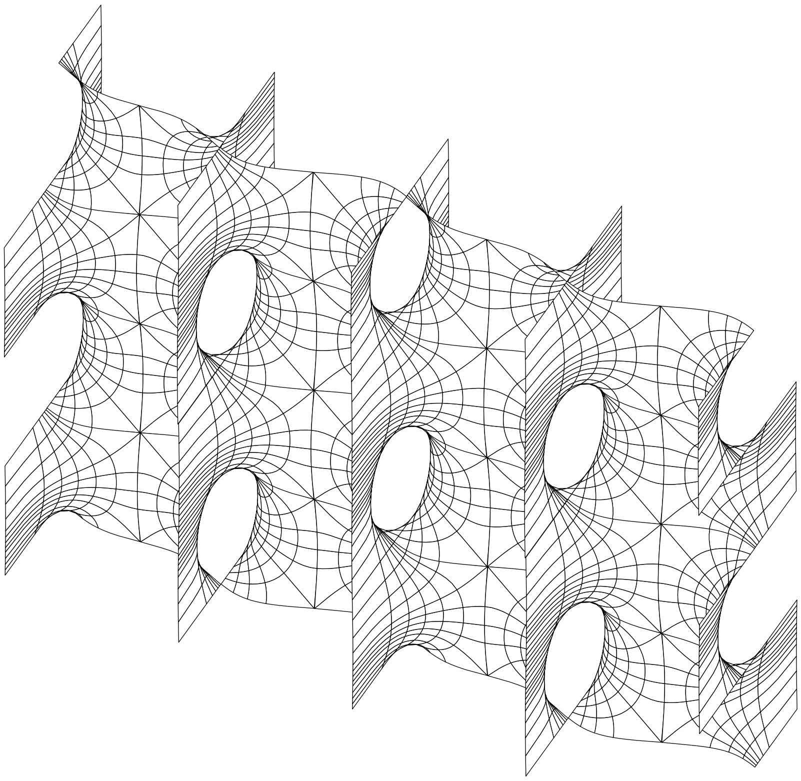


Abbildung 3.25: Zaun von symmetrischen Satteltürmen ($\varepsilon = 0.33$).

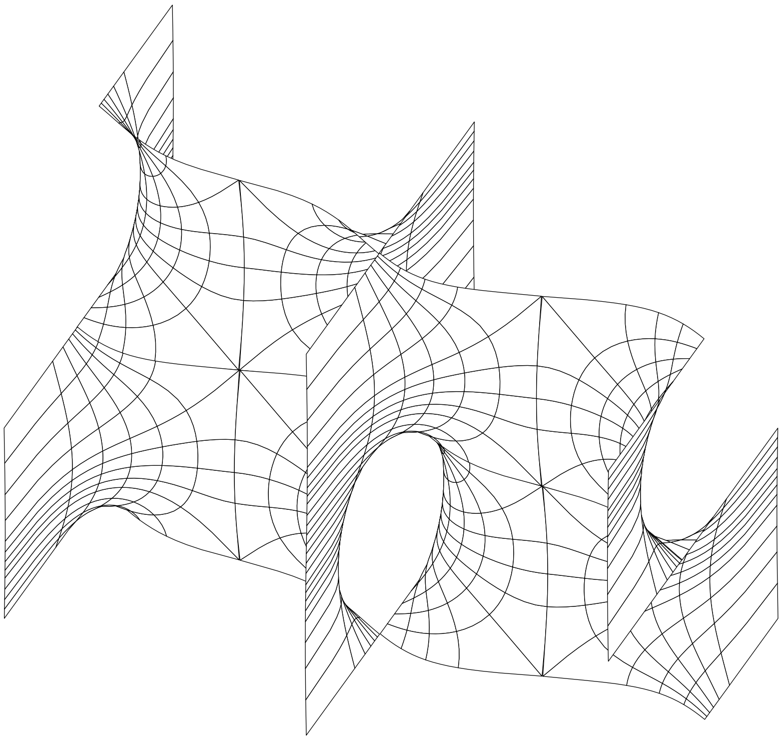


Abbildung 3.26: Translationsfundamentalbereich der Fläche

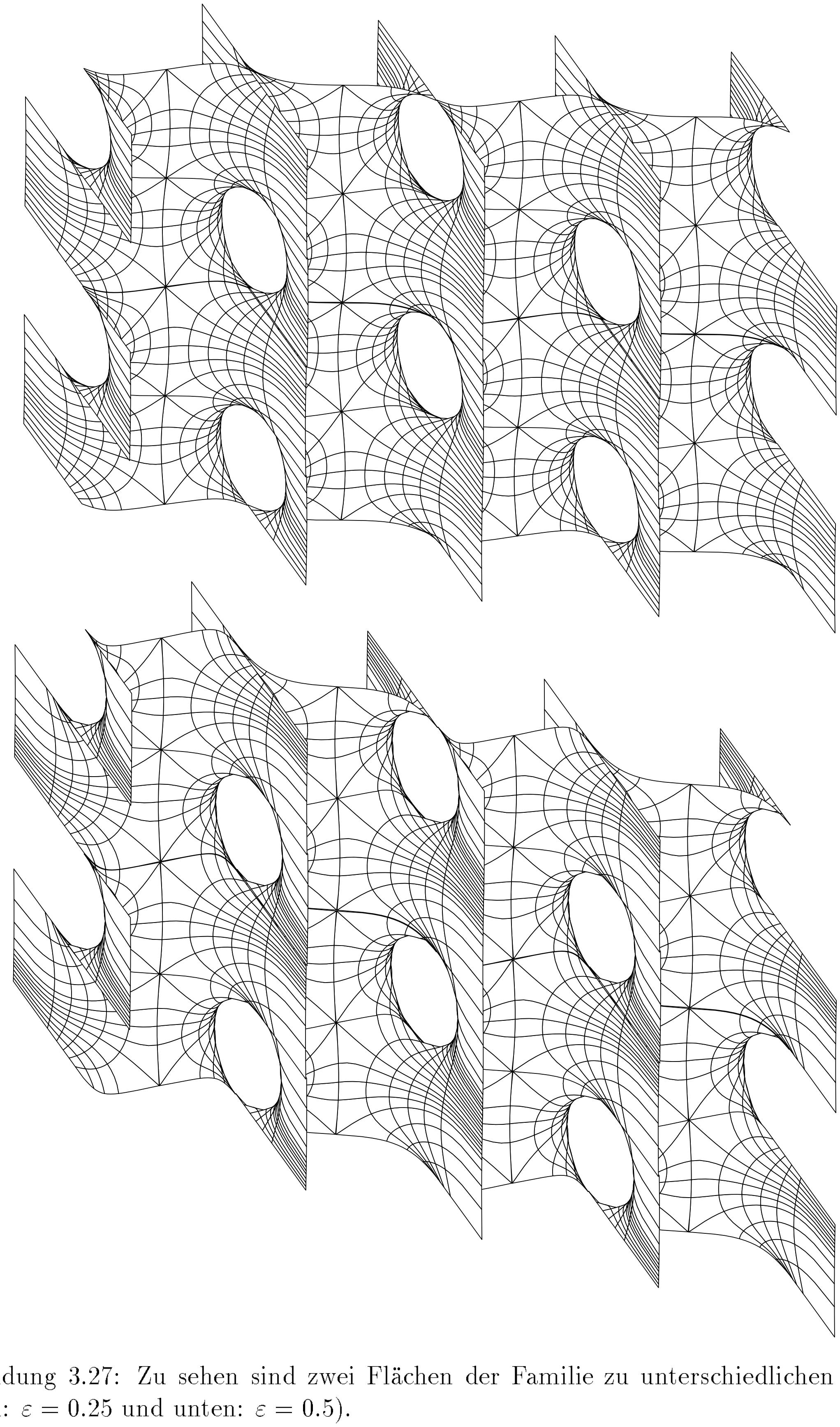


Abbildung 3.27: Zu sehen sind zwei Flächen der Familie zu unterschiedlichen ε-Werten (oben: $\varepsilon = 0.25$ und unten: $\varepsilon = 0.5$).

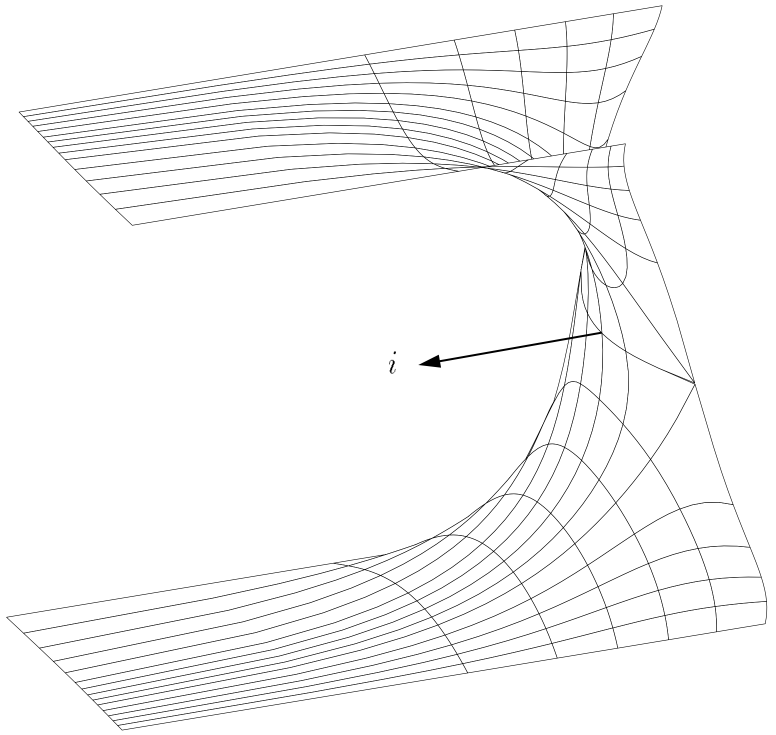


Abbildung 3.28: Viertel Fundamentalbereich der Fläche, ihr Fundamentalstück ist schattiert und die 180°-Rotationsnormale ist eingezeichnet.

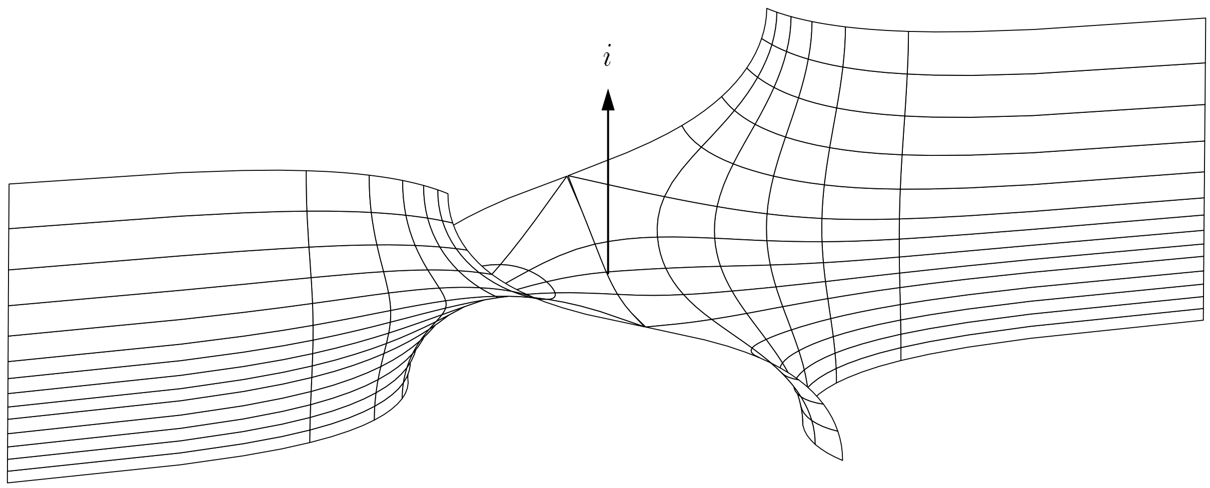
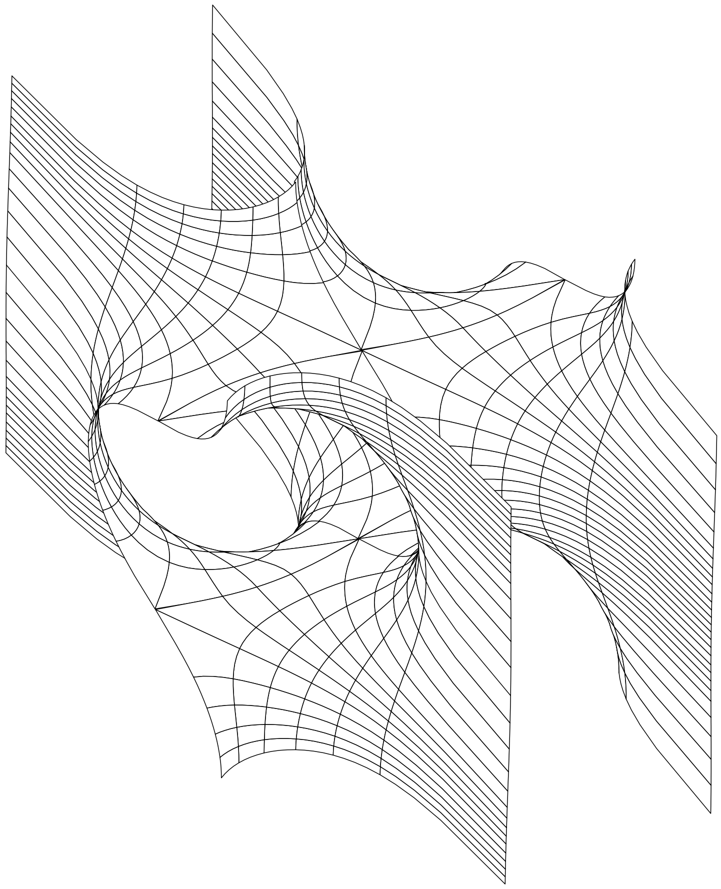


Abbildung 3.29: Viertel Fundamentalbereich der Konjugierten, ihr Fundamentalstück ist schattiert und die 180°-Rotationsnormale ist eingezeichnet.



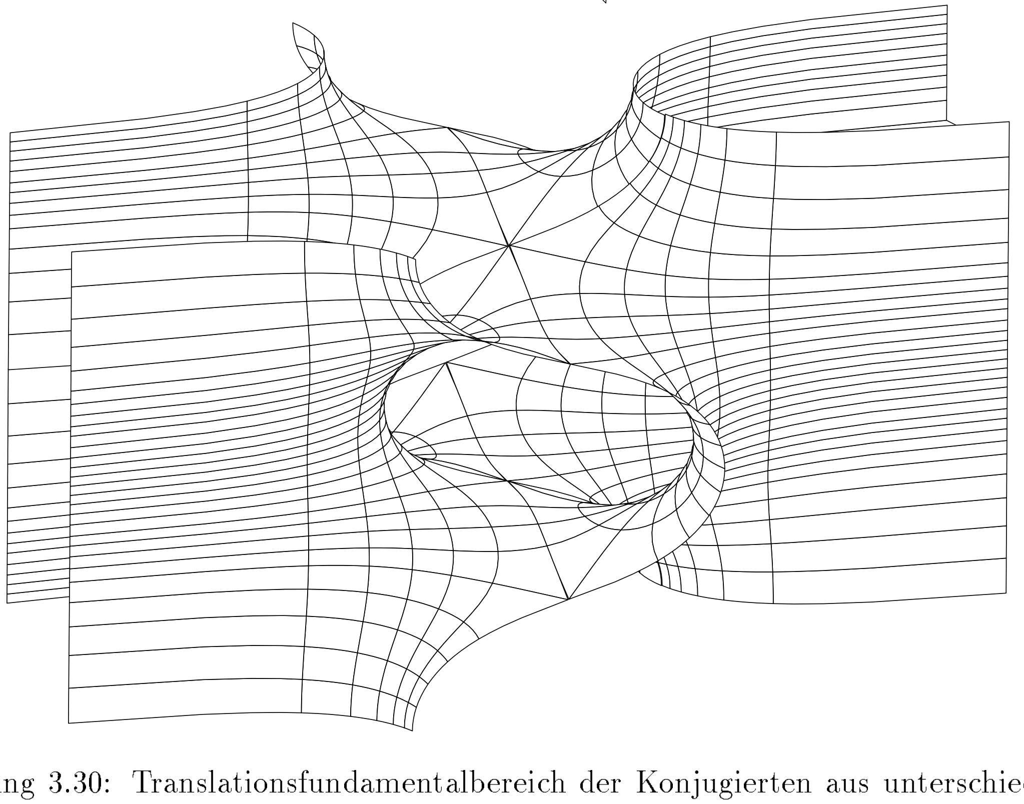


Abbildung 3.30: Translationsfundamentalbereich der Konjugierten aus unterschiedlichen Perspektiven ($\varepsilon = 0.33$).

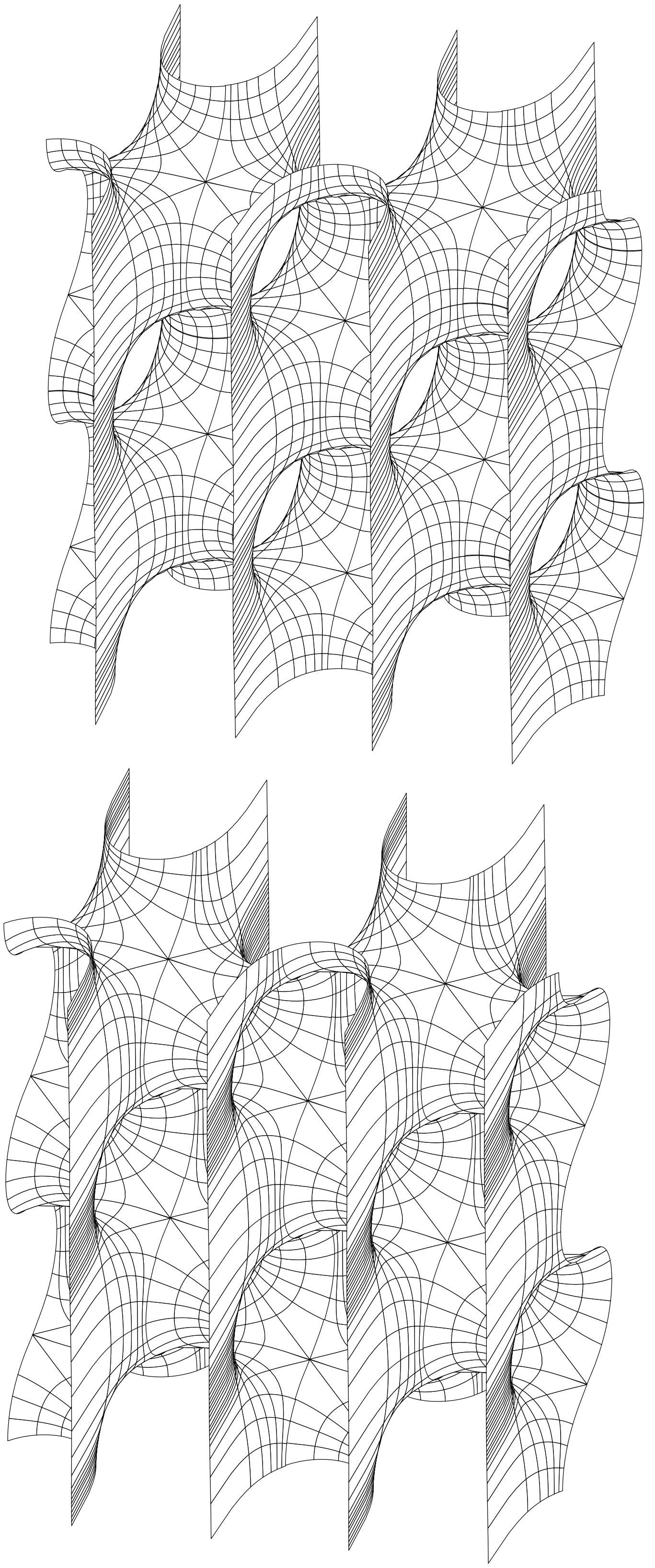


Abbildung 3.31: Zu sehen sind zwei Elemente der konjugierten Flächenfamilie zu unterschiedlichen ε-Werten (oben: $\varepsilon = 0.25$ und unten: $\varepsilon = 0.5$).

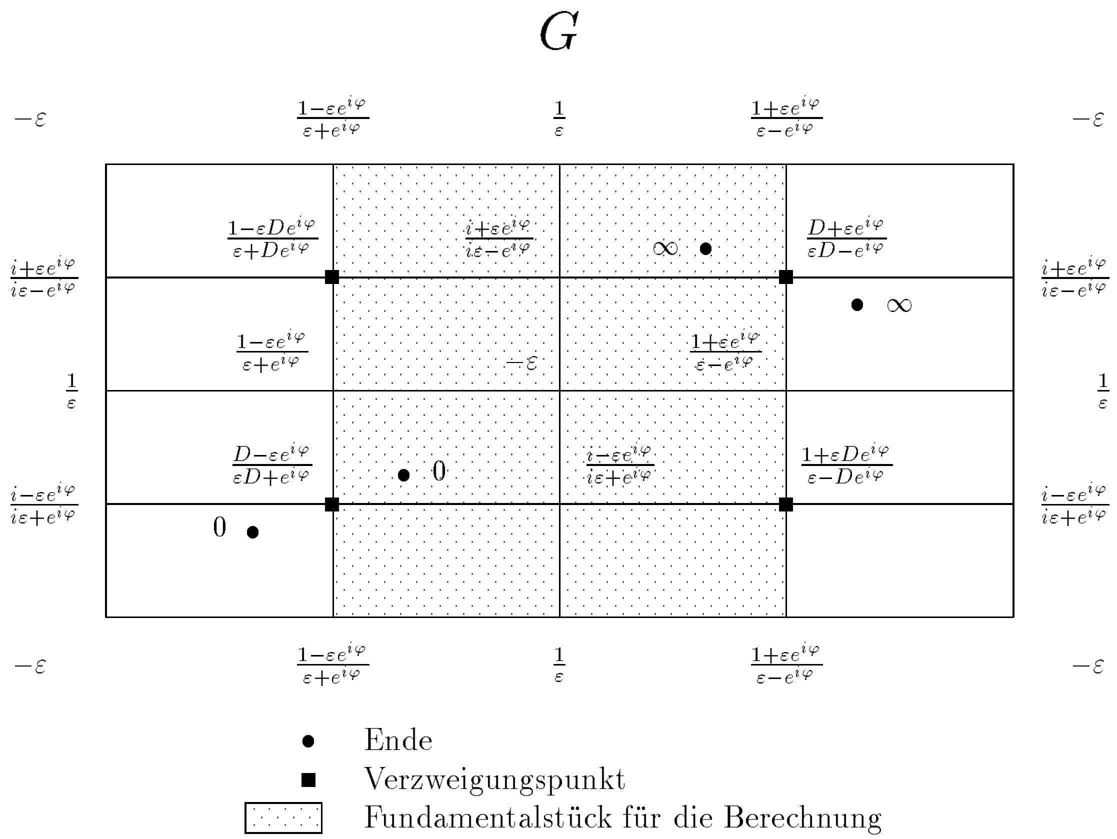
3.5 Zaun von weniger symmetrischen Satteltürmen

3.5.1 Weierstraßdaten, Parameter und Symmetrien

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird nun die 3-Parameter Flächenfamilie untersucht, die die bisher beschriebenen Flächen als Spezialfälle enthält. Für diese Schar ergeben sich die folgenden Weierstraßdaten:

$$G = \frac{\mathcal{J}_D + \varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon \mathcal{J}_D - e^{i\varphi}} \quad , \quad dh = i \cdot dz \quad ,$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \le \varphi < \alpha \quad , \quad 0 \le \varepsilon \le 1 \quad .$$



Einer der Parameter ist wieder der konforme Parameter α des zugrunde liegenden Torus.

Wenn $\varepsilon = \varphi = 0$ ist, ergeben sich die Flächen aus Abschnitt 3.1. Für $\varepsilon = 0$ und $0 < \varphi < \alpha$ erhält man die gleichen Flächen wie im ersten Abschnitt dieses Kapitels, wobei die Flächen dann im Raum um die 0-∞-Achse bzw. um die z-Achse verdreht sind, was bedeutet, daß die Normalen der Enden unverändert bleiben.

Falls $\varepsilon = 1$ und $\varphi = 0$ gilt, bekommen wir die Flächen aus Abschnitt 3.2. Für $\varepsilon = 1$ und $0 \le \varphi < \alpha$ hat man die zweifach periodische Flächenschar des Abschnitts 3.3 und mit

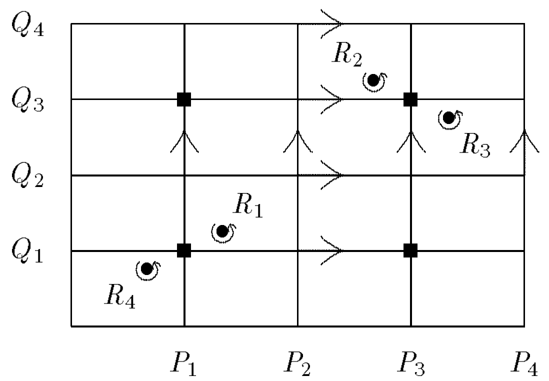
$\varepsilon = 1$ und $\varphi = \alpha$ die Riemannsche Minimalfläche, die einfach periodisch ist. Im weiteren Verlauf des Textes soll immer $\varphi < \alpha$ gelten.

Wenn $\varphi = 0$ und $0 \leq \varepsilon \leq 1$ gilt, erhalten wir die Flächenfamilie des vorherigen Abschnitts.

Die allgemeine Flächenschar kann als Symmetrien natürlich höchstens die Schnittmenge aller Symmetrien der vorher betrachteten Spezialfälle enthalten. Deshalb besitzen die Flächen dieser Familie i. a. keine Symmetrielinien mehr, sondern nur noch die Punktspiegelung an den Verzweigungspunkten der Gaußabbildung und ein Paar von sogenannten Gleitspiegelungen, dessen Eigenschaften im nächsten Unterabschnitt näher erläutert werden. Das Paar der Gleitspiegelungen ist auch auf allen bisher beschriebenen Flächen vorhanden. Diese Art der Spiegelung ist aber nicht sofort zu erkennen, weil sie keine innere Symmetrie ist und weder auf dem Torus noch auf der Minimalfläche Fixpunkte besitzt. Da die Gleitspiegelungen auf der Minimalfläche keine Fixpunkte haben, können sie nicht interaktiv am Computerbildschirm angewählt werden, weshalb sich durch sie weder die Parametrisierung der Fläche vereinfacht noch deren Berechnungszeit verkürzt. Das Fundamentalstück für die Berechnung ist also der halbe Torus, was der ganzen Sphäre entspricht, und besteht aus 28 Teilstücken (siehe Unterabschnitt 3.5.4 und Abbildung 3.34 auf Seite 93).

3.5.2 Perioden

In diesem Unterabschnitt werden die Perioden der Flächefamilie und ihrer konjugierten Schar gleichzeitig untersucht. Die auftretenden Perioden sind deshalb hier, solange nichts anderes gesagt wird, als komplexe Perioden aufzufassen. Die Perioden, die durch die Rückkehrschnitte des Torus erzeugt werden, heißen P_i bzw. Q_i. Die möglichen Perioden auf Grund der Enden sind mit R_i benannt.



Wegen der Punktsymmetrie an den Verzweigungspunkten gilt:

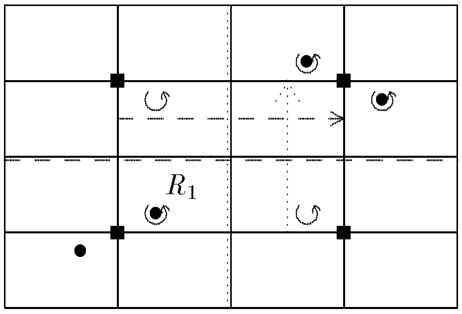
$$R_4 = -R_1 \qquad \text{und} \qquad R_3 = -R_2 \quad .$$

Also gilt:

$$\left.\begin{array}{l} P_1 + R_1 = P_2 \\ \left.\begin{array}{l} P_2 + R_2 = P_3 \\ P_3 - R_2 = P_4 \end{array}\right\} \Longrightarrow P_4 = P_2 \\ P_4 - R_1 = P_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} P_1 + R_1 = P_2 \\ P_2 + R_2 = P_3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} Q_4 + R_2 = Q_3 \\ Q_3 - R_2 = Q_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow Q_4 = Q_2 \\ Q_2 + R_1 = Q_1 \\ Q_1 - R_1 = Q_4 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} Q_2 + R_2 = Q_3 \\ Q_2 + R_1 = Q_1 \end{array}$$

Um die Anzahl der unabhängigen Perioden weiter zu verkleinern, benötigt man weitere Symmetrien. Hierfür bieten sich die beiden in der folgenden Skizze dargestellten Abbildungen an.



Diese möglichen Symmetrien sind aber keine inneren Symmetrien, und die beiden Abbildungen besitzen keine Fixpunkte. Die eine Abbildung, die durch die gepunktete Linie und den gepunkteten Pfeil angedeutet ist und im folgenden A genannt wird, ist auf dem Torus eine Komposition einer Spiegelung an der imaginären Achse mit einer Translation um die halbe Torushöhe. Die gestrichelt gezeichnete Abbildung, im folgenden B genannt, ist auf dem Torus eine Hintereinanderschaltung einer Spiegelung an der reellen Achse und einer Translation um die halbe Torusbreite. Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} A &= B \circ Verzweigungspunktspiegelung \\ &= Verzweigungspunktspiegelung \circ B \quad . \end{aligned}$$

Nun wird als erstes untersucht, wie sich G und dh unter den beiden Symmetriekandidaten verhalten. Unter beiden Abbildungen bleibt $|dh|$ invariant, weil folgendes gilt:

$$\begin{aligned} z \circ A = -\bar{z} + \frac{i}{2} Torush\ddot{o}he \quad &\Longrightarrow \quad d(h \circ A) = i \cdot d(z \circ A) = -i\ d\bar{z} = \overline{dh} \\ z \circ B = \bar{z} + \frac{1}{2} Torusbreite \quad &\Longrightarrow \quad d(h \circ B) = i \cdot d(z \circ B) = i\ d\bar{z} = -\overline{dh} \quad . \end{aligned}$$

Aus der Skizze von $\mathcal{J}_D$ auf Seite 40 ließt man ab, daß für beide Abbildungen gilt:

$$\mathcal{J}_D \longmapsto -\frac{1}{\overline{\mathcal{J}_D}} \quad ,$$

$$\text{woraus folgt:} \qquad G = \frac{\mathcal{J}_D + \varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon \mathcal{J}_D - e^{i\varphi}} \quad \longmapsto \quad \begin{aligned} & \frac{-\frac{1}{\overline{\mathcal{J}_D}} + \varepsilon e^{i\varphi}}{-\varepsilon \frac{1}{\overline{\mathcal{J}_D}} - e^{i\varphi}} \\ = \quad & -\overline{\left(\frac{\varepsilon e^{-i\varphi} - \frac{1}{\mathcal{J}_D}}{\varepsilon \frac{1}{\mathcal{J}_D} + e^{-i\varphi}}\right)} \\ = \quad & -\overline{\left(\frac{\varepsilon e^{-i\varphi} \mathcal{J}_D - 1}{\varepsilon + e^{-i\varphi} \mathcal{J}_D}\right)} \\ = \quad & -\overline{\left(\frac{\varepsilon \mathcal{J}_D - e^{i\varphi}}{\mathcal{J}_D + \varepsilon e^{i\varphi}}\right)} = -\frac{1}{\overline{G}} \quad . \end{aligned}$$

Weil ja für die Metrik gilt, daß $2ds = (|G| + 1/|G|)|dh|$ ist, sind beide Abbildungen Isometrien.

Jetzt betrachten wir, wie sich das Differential $d\Psi$ der Weierstraßdarstellung dieser Flächenschar unter den Isometrien verhält.

$$\begin{aligned} d\Psi &= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{G} - G\right), \frac{i}{2}\left(\frac{1}{G} + G\right), 1\right) \; i \; dz \quad , \\ d(\Psi \circ A) &= \left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\overline{G}} - \overline{G}\right), \frac{i}{2}\left(\frac{-1}{\overline{G}} - \overline{G}\right), 1\right) \; (-i) \; d\bar{z} \\ &= \overline{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{G} - G\right), \frac{i}{2}\left(\frac{1}{G} + G\right), 1\right)} \; \bar{\imath} \; d\bar{z} \\ &= \overline{d\Psi} \quad , \\ d(\Psi \circ B) &= \overline{\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{G} - G\right), \frac{i}{2}\left(\frac{1}{G} + G\right), 1\right)} \; \overline{(-i)} \; d\bar{z} \\ &= -\overline{d\Psi} \quad . \end{aligned}$$

Deshalb sind diese Isometrien tatsächlich Symmetrien. Insbesondere folgt für den Realteil, daß die Symmetrie A eine Translation ist und $B = A \circ \mathit{Verzweigungspunktspiegelung}$ eine Punktspiegelung an einem Punkt, der nicht auf der Fläche liegt. Für den Imaginärteil, also für die konjugierte Flächenfamilie gilt hingegen, daß A eine Punktspiegelung und B eine Translation ist. Solche Symmetrien nennt man Gleitspiegelungen des Torus.

Nun wissen wir, daß die Isometrie B eine Punktspiegelung in $\mathbf{R}^3$ ist. Daher lesen wir aus der Periodenskizze auf Seite 84 ab, daß für die Realteile der Perioden

$$\Re(R_1) = \Re(R_3) \qquad \text{und} \qquad \Re(Q_1) = -\Re(Q_3) \qquad \text{gilt.}$$

Zusammen mit den bisherigen Überlegungen folgt hieraus für die Realteile der Perioden:

$$-\Re(R_4) = \Re(R_3) = -\Re(R_2) = \Re(R_1) = -\Re(Q_3) = \Re(Q_1) \quad ,$$

$$\Re(Q_4) = \Re(Q_2) = 0 \quad ,$$

$$\Re(P_3) = \Re(P_1) \quad ,$$

$$\Re(P_4) = \Re(P_2) = \Re(P_1) + \Re(Q_1) \quad .$$

Weil alle Perioden als Linearkombination von $\Re(P_1)$ und $\Re(Q_1)$ ausgedrückt werden können, ist die Flächenfamilie höchstens zweifach periodisch.

Für die konjugierte Schar ist die Isometrie A eine Punktspiegelung, und für die Imaginärteile der Perioden gilt nun:

$$\Im(R_1) = \Im(R_2) \qquad \text{und} \qquad \Im(P_1) = -\Im(P_3) \quad .$$

Daraus folgt:

$$-\Im(R_4) = -\Im(R_3) = \Im(R_2) = \Im(R_1) = \Im(P_3) = -\Im(P_1) \quad ,$$

$$\Im(P_4) = \Im(P_2) = 0 \quad ,$$

$$\Im(Q_4) = \Im(Q_2) = \Im(P_1) + \Im(Q_1) \quad ,$$

$$\Im(Q_3) = \Im(Q_1) \quad .$$

Daher ist auch die konjugierte Flächenschar höchstens zweifach periodisch.

Wegen der Punktspiegelsymmetrie an den Verzweigungspunkten sind sowohl der Real- als auch der Imaginärteil der Perioden P_1 und Q_1 ungleich null. Damit die Flächen tatsächlich doppelt periodisch sind, ist jetzt nur noch zu zeigen, daß die Real- und Imaginärteile von P_1 und Q_1 jeweils linear unabhängig sind. Um dies einzusehen, berechnen wir die z-Komponente der Perioden:

$$P_{1_z} = \int\limits_{\sigma_{P_1}} dh = \int\limits_{\sigma_{P_1}} i \cdot dz \quad ,$$

$$Q_{1_z} = \int\limits_{\sigma_{Q_1}} dh = \int\limits_{\sigma_{Q_1}} i \cdot dz \quad .$$

Da die Integrationswege σ_{P_1} und σ_{Q_1} auf dem Torus dieselben sind, entlang denen dh in Unterabschnitt 3.1.3 untersucht worden ist, wissen wir, daß

$$\Re\left(Q_1\right)_z = \Im\left(P_1\right)_z = 0 \quad , \quad \Re\left(P_1\right)_z \neq 0 \quad \text{und} \quad \Im\left(Q_1\right)_z \neq 0$$

gilt, woraus folgt, daß die Flächenfamilien zweifach periodisch sind.

3.5.3 Einbettung

Jetzt muß noch gezeigt werden, daß die gesamte 3-Parameter Minimalflächenschar und die dazu konjugierte Flächenschar eingebettet sind. Damit sind dann auch die in den beiden vorherigen Abschnitten betrachteten 2-Parameter Familien eingebettet.

Wir wissen, daß die Flächen der beiden Familien zweifach periodische minimale Immersionen sind, deren Enden parallel, eben und eingebettet sind, und daß die Unterfamilien für $\varphi = 0$ und $\varepsilon = 0$ oder $\varepsilon = 1$ für alle $\alpha \in (0, \pi/2)$ eingebettet sind (vgl. 3.1.4, 3.1.5, 3.2.4 u. 3.2.5).

Die Idee des Beweises ist nun die folgende: Wir wählen eine beliebige Fläche F aus der Schar, betrachten einen stetigen Weg $c : [0,1] \longrightarrow \{\textit{Flächen der Schar}\}$, der die Eigenschaften $c(0) = \textit{bekannte eingebettete Fläche}$ ($z.B.\ \varepsilon = \varphi = 0$) und $c(1) = F$ hat, und zeigen anschließend, daß $c(t)$ für alle $t \in [0,1]$ eingebettet ist. Dieser Beweis ist in Zusammenarbeit mit A. Arnez entstanden, da die Minimalflächen dieses Kapitels Grenzwerte von dreifach periodischen Flächen aus [21] sind, die in [1] näher untersucht werden.

Zunächst nehmen wir einmal an, daß der Beweis für kompakte Minimalflächen so funktioniert, wie oben skizziert. Nun wählen wir eine beliebige Fläche F der Familie und einen beliebigen stetigen Weg mit den oben beschriebenen Eigenschaften. Falls es ein $t_0 \in (0, 1]$ gibt, so daß $c(t_0)$ nicht eingebettet ist, dann gibt es für dieses $c(t_0)$ einen Punkt $p \in \mathbf{T}_{t_0} \times \mathbf{R}$, in dem sich diese Fläche selbst schneidet oder berührt. Man beachte, daß i. a. jedes $c(t)$ in einem anderen $\mathbf{T}_t \times \mathbf{R}$ liegt. Jetzt wählen wir eine Höhe $r \in \mathbf{R}^+$ so, daß $p \in \mathbf{T}_{t_0} \times [-r, r]$ enthalten ist. Daraufhin schneidet man alle Flächen des Wegs in den Höhen $\pm r$ ab, so daß dadurch eine 1-Parameter Schar von kompakten Flächen $c_r(t)$ entsteht, wobei die Fläche $c_r(0)$ eingebettet ist. Weiter unten wird für diese Flächenschar gezeigt, daß deshalb $c_r(t)$ für alle $t \in [0, 1]$ eingebettet ist, woraus ein Widerspruch zur Annahme folgt. Das bedeutet, daß Schnitt- oder Berührungspunkte bei diesen Flächen nur von den Enden her auftreten können. Weil jedoch diese Flächen hier alle parallele Scherk-Enden haben, ist somit die gesamte Flächenfamilie eingebettet.

Schließlich muß nun der noch ausstehende Beweis für die Familie kompakter Minimalflächen nachgeliefert werden (vergleiche auch [1]).

Wenn eine kompakte Familie kompakter minimaler Immersionen F gegeben ist, dann existiert auf Grund der Krümmungseigenschaften von Minimalflächen und wegen der Kompaktheit ein $\delta > 0$, so daß für alle Punkte p jeder Fläche der Schar das Flächenstück $F(B_\delta(p))$ eingebettet ist, wobei $B_\delta(p)$ den Ball mit dem Radius δ um den Punkt p bezeichnet. Auf Grund dieser Eigenschaft gilt für zwei Punkte p und q mit $F(p) = F(q)$ entweder $p = q$ oder $q \notin B_\delta(p)$, d. h. die Urbilder der Selbstschnitt- oder Berührungspunkte der Flächen lassen sich trennen.

Wie oben bezeichne $c(t)$ mit $t \in [0, 1]$ die zu untersuchende kompakte Minimalflächenschar. Außerdem sei $c(0)$ eingebettet. Weiter sei

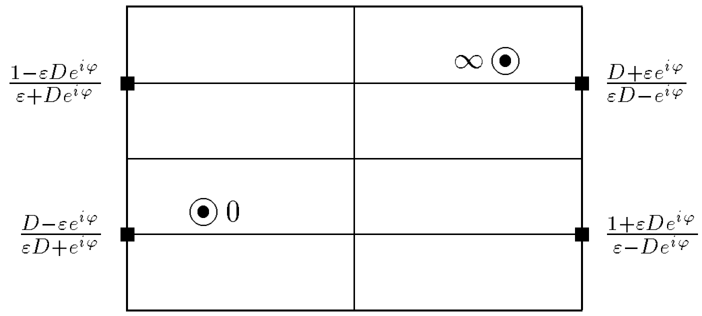
$$t_0 := \inf_{t \in [0,1]} \{\textit{nicht eingebettete } c(t)\} \quad .$$

Wegen der Kompaktheit der Situation und der Trennbarkeit der Urbilder von im Raum gleichen Punkten ist $c(t_0)$ selbst auch nicht eingebettet; also ist das Infimum ein Minimum. Auf Grund der Stetigkeit der Flächenfamilie kann sich $c(t_0)$ nicht transversal selbst durchdringen; denn sonst würde sich auch $c(t_0 - \varepsilon)$ für kleines $\varepsilon > 0$ transversal schneiden, weil die Gaußabbildung und damit die Lage der Tangentialräume der Flächen stetig von t abhängen. Daher muß sich $c(t_0)$ von einer Seite her selbst berühren. Über dem Tangentialraum im Berührungspunkt sind die beiden Flächenstücke lokal harmonische Graphen, von denen der eine oberhalb des anderen liegt. Die Differenz der Graphen ist ebenfalls harmonisch und hat im Berührungspunkt ein lokales Minimum. Nach dem Maximum-Prinzip sind die beiden Flächenstücke deshalb in einer Umgebung ihres Berührungspunktes identisch. Mittels analytischer Fortsetzung sind die Flächenstücke damit global identisch. Jeder Punkt der Fläche im Raum hat also wegen der Trennbarkeit der Urbilder zwei verschiedene Urbilder. Die Gaußwerte sich im Bild entsprechender Punkte müssen natürlich gleich oder antipodal sein. Auf Grund der Verzweigungswerte sind sie antipodal, und je zwei der Verzweigungspunkte werden auf den gleichen Bildpunkt abgebildet. Auf der Fläche im Raum sind in ihrem Translationsfundamentalbereich also nur noch zwei Verzweigungspunkte vorhanden. Da wir im vorherigen Unterabschnitt gesehen haben, daß die Verzweigungspunkte die Perioden erzeugen, ist $c(t_0)$ höchstens noch einfach periodisch, was im Widerspruch zum Ergebnis des letzten Unterabschnitts steht. Damit erhält man das gewünschte Ergebnis, daß $c(t)$ doch für alle $t \in [0, 1]$ eingebettet ist.

Aus diesem Grund ist also die gesamte 3-Paramter Minimalflächenfamilie samt ihrer konjugierten Familie eingebettet.

3.5.4 Parametrisierung

Die Weierstraßdaten $G = (\mathcal{J}_D + \varepsilon e^{i\varphi})/(\varepsilon \mathcal{J}_D - e^{i\varphi})$ und $dh = i \cdot dz$ müssen über das folgende Fundamentalstück auf dem Torus integriert werden:

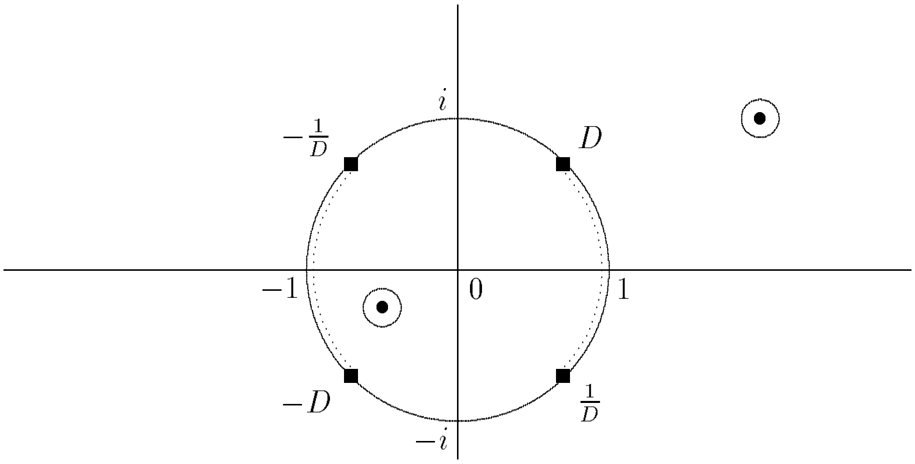


Wie in den Abschnitten bisher könnte man auch hier versuchen, $\mathcal{J}_D$ als lokale Koordinate zu benutzen, und schreiben

$$G = \frac{\mathcal{J}_D + \varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon \mathcal{J}_D - e^{i\varphi}} \quad \text{und} \quad dh = i \cdot \frac{d\mathcal{J}_D}{\mathcal{J}_D{}'}$$

$$\text{mit} \quad (\mathcal{J}_D{}')^2 = \mathcal{J}_D{}^4 - 2\cos(2\alpha) \cdot \mathcal{J}_D{}^2 + 1 \quad \text{(siehe hierzu (1.25) auf Seite 17)} \quad .$$

Dann müßte über das folgende Bild der Karte $\mathcal{J}_D$ des Fundamentalstücks in $\mathbf{C}$ integriert werden:



Wir müßten also über die gesamte komplexe Ebene — mit Ausnahme der beiden Kreise um die Enden — integrieren und darauf achten, daß kein Integrationsweg die gepunkteten Linien kreuzt. Da wir jedoch nicht wirklich über die gesamte Ebene integrieren können, entsteht ein Loch in der Minimalfläche in der Nähe des Punktes $\mathcal{J}_D = \infty$ bzw. $G = 1/\varepsilon$. Um dies zu vermeiden, muß man eine andere lokale Koordinate verwenden, und zwar eine Koordinate, für die eines der beiden Enden bei unendlich liegt. Als neue Karte bietet sich die Gaußabbildung selbst an, d. h. man verwendet

$$G = G \quad \text{und} \quad dh = i \cdot \frac{dG}{G'} \quad .$$

Jetzt müssen wir G' als Funktion von G herleiten. Es gilt:

$$G' = \frac{\partial G}{\partial \mathcal{J}_D} \cdot \mathcal{J}_D{}' = \frac{-e^{i\varphi}\,(1+\varepsilon^2)}{(\varepsilon \mathcal{J}_D - e^{i\varphi})^2} \cdot \mathcal{J}_D{}'$$

$$\text{mit} \quad (\mathcal{J}_D{}')^2 = \mathcal{J}_D{}^4 - 2\cos(2\alpha) \cdot \mathcal{J}_D{}^2 + 1 \quad \text{und} \quad \mathcal{J}_D = \frac{e^{i\varphi}\,(G+\varepsilon)}{\varepsilon G - 1} \quad .$$

Hieraus ergibt sich nach einer etwas längeren Rechnung:

$$(G')^2 = \left(\frac{(\varepsilon G - 1)\,(G+\varepsilon)}{-\,(1+\varepsilon^2)}\right)^2 \left(\left(\frac{e^{i\varphi}\,(G+\varepsilon)}{\varepsilon G - 1}\right)^2 - 2\cos(2\alpha) + \left(\frac{\varepsilon G - 1}{e^{i\varphi}\,(G+\varepsilon)}\right)^2\right) \quad .$$

Integrieren muß man jetzt über das Bild des Fundamentalstücks unter der Gaußabbildung, wobei die Integrationswege die gepunkteten Linien wieder nicht schneiden dürfen. Mit B_i werden die Verzweigungswerte von G in der Skizze auf der nächsten Seite bezeichnet.

Hierbei gilt:

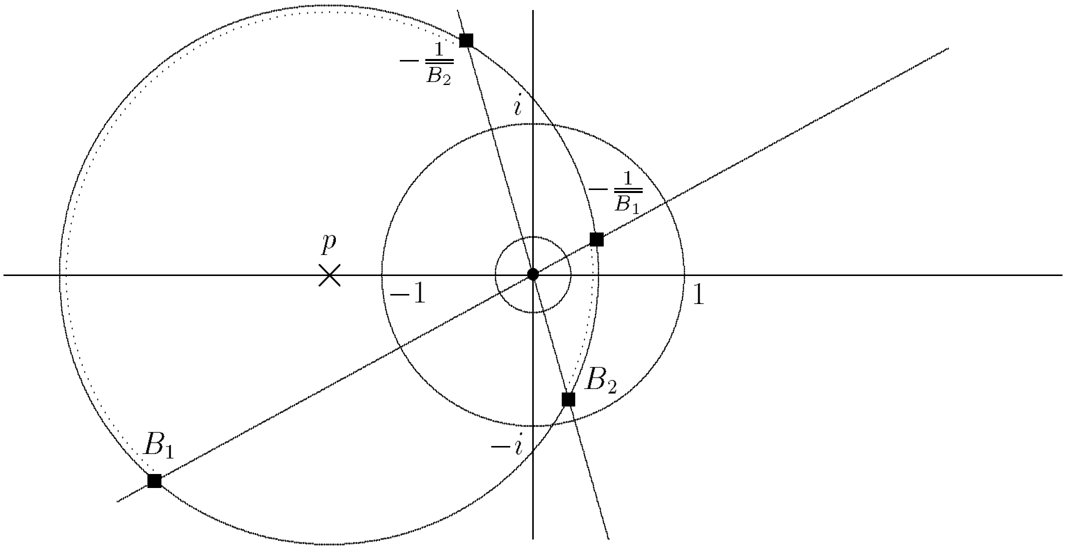
$$
\begin{aligned}
B_1 &= \frac{e^{i\alpha}+\varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon e^{i\alpha}-e^{i\varphi}} &&= -\frac{(1-\varepsilon^2)\cos(\alpha-\varphi)+i\,(1+\varepsilon^2)\sin(\alpha-\varphi)}{1-2\varepsilon\cos(\alpha-\varphi)+\varepsilon^2}\ , \\
B_2 &= \frac{1-\varepsilon e^{i\alpha}e^{i\varphi}}{\varepsilon+e^{i\alpha}e^{i\varphi}} &&= \frac{(1-\varepsilon^2)\cos(\alpha+\varphi)-i\,(1+\varepsilon^2)\sin(\alpha+\varphi)}{1+2\varepsilon\cos(\alpha+\varphi)+\varepsilon^2}\ , \\
B_3 &= \frac{e^{i\alpha}-\varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon e^{i\alpha}+e^{i\varphi}} &&= \frac{(1-\varepsilon^2)\cos(\alpha-\varphi)+i\,(1+\varepsilon^2)\sin(\alpha-\varphi)}{1+2\varepsilon\cos(\alpha-\varphi)+\varepsilon^2}\ , \\
B_4 &= \frac{1+\varepsilon e^{i\alpha}e^{i\varphi}}{\varepsilon-e^{i\alpha}e^{i\varphi}} &&= -\frac{(1-\varepsilon^2)\cos(\alpha+\varphi)-i\,(1+\varepsilon^2)\sin(\alpha+\varphi)}{1-2\varepsilon\cos(\alpha+\varphi)+\varepsilon^2}\ .
\end{aligned}
$$

An Hand der Darstellung der Verzweigungswerte mit Hilfe der Exponentialfunktion erkennt man, daß

$$B_3 = -\frac{1}{\overline{B_1}} \qquad \text{und} \qquad B_4 = -\frac{1}{\overline{B_2}} \qquad \text{gilt.}$$

Hieran sieht man auch, daß diese Familie die gleiche ist, die W. H. Meeks und H. Rosenberg in [22, Theorem 9] untersucht haben. In ihrem Text ist die Gaußabbildung allerdings noch mit einem konstanten Faktor aus $\mathbf{S}^1$ multipliziert, so daß für die Verzweigungswerte zusätzlich $\arg(B_2) = -\arg(B_3)$ gilt. Dies bewirkt aber nur eine Drehung der Flächen im Raum.

Durch die Zerlegung in Real- und Imaginärteil kann man außerdem leicht ausrechnen, daß die vier Verzweigungswerte der Gaußabbildung in der komplexen Ebene auf einem Kreis mit dem Radius $(1+\varepsilon^2)/(1-\varepsilon^2)$ um den Mittelpunkt $p = -2\varepsilon/(1-\varepsilon^2)$ liegen. Im Fall $\varepsilon = 0$ ergibt sich für diesen Kreis der Einheitskreis, und für $\varepsilon \longrightarrow 1$ bewegt sich der Kreismittelpunkt entlang der negativen reellen Achse nach unendlich, wobei sich der Radius des Kreises so vergrößert, daß der Kreis die imaginäre Achse immer schneidet; denn es gilt offensichtlich $(1+\varepsilon^2)/(1-\varepsilon^2) > 2\varepsilon/(1-\varepsilon^2)$ für $0 \le \varepsilon < 1$.



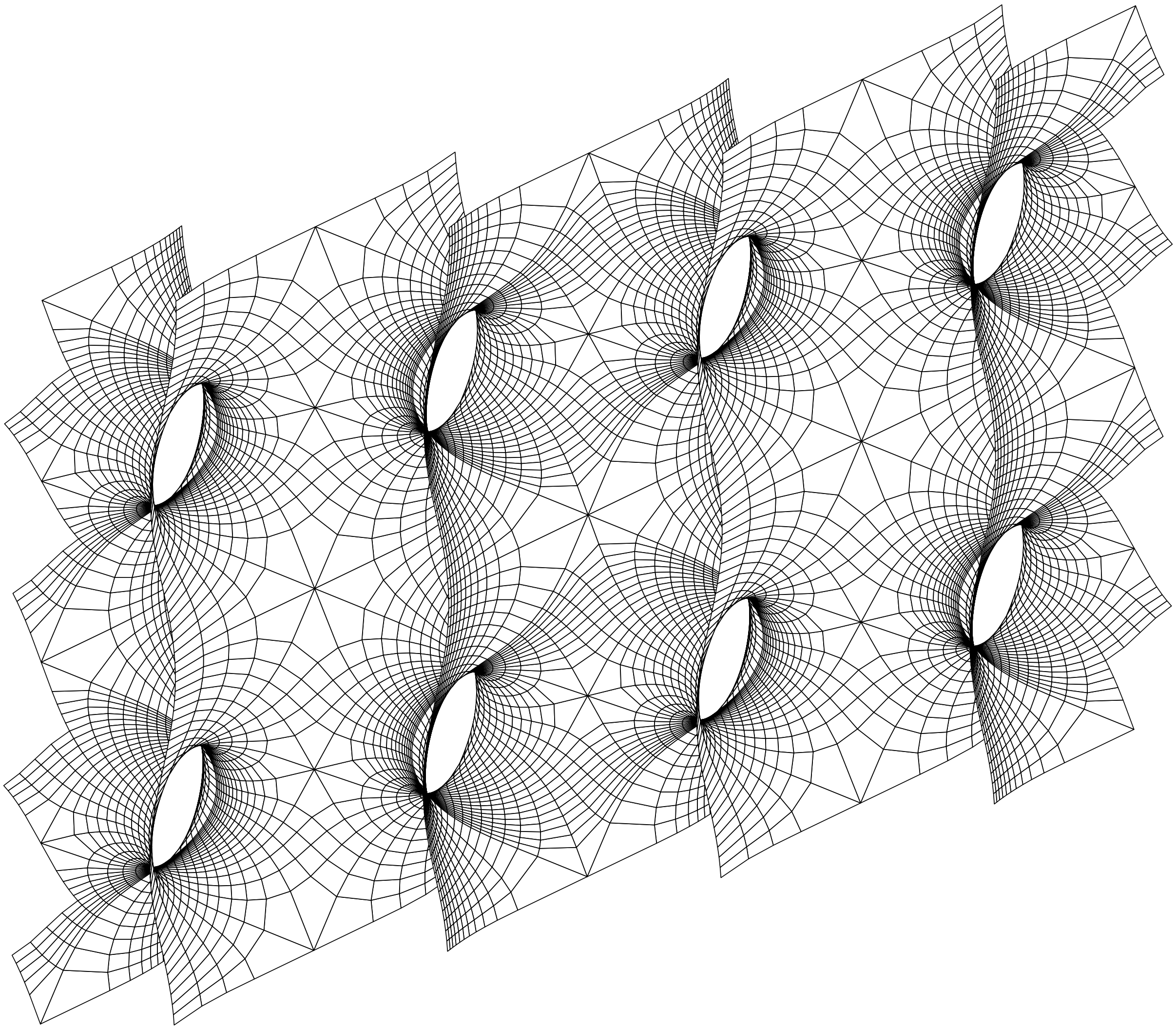


Abbildung 3.32: Zaun von Satteltürmen

Auch hier sollen sich die Linien in allen Punkten der Flächefamilie mit Ausnahme der Verzweigungspunkte senkrecht schneiden. Dies erreicht man wieder durch Polarkoordinatenzentren in den Enden der Fläche. Da die Verzweigungspunkte bei der Integration besonders behandelt werden und in bezug auf Polarkoordinaten um den Ursprung i. a. recht unsymmetrisch verteilt sind, ist das Fundamentalstück dieser Flächenschar 28-fach unterteilt, wodurch eine möglichst gleichmäßige Linienverteilung auf der Fläche erreicht wird.

Die Abbildung zur Erzeugnung der Parameterlinien wird hier nicht nochmals beschrieben, da es sich ja um einfache Polarkoordinaten um den Nullpunkt handelt. Das Parametergebiet ist in Bild 3.34 auf der nächsten Seite zu sehen.

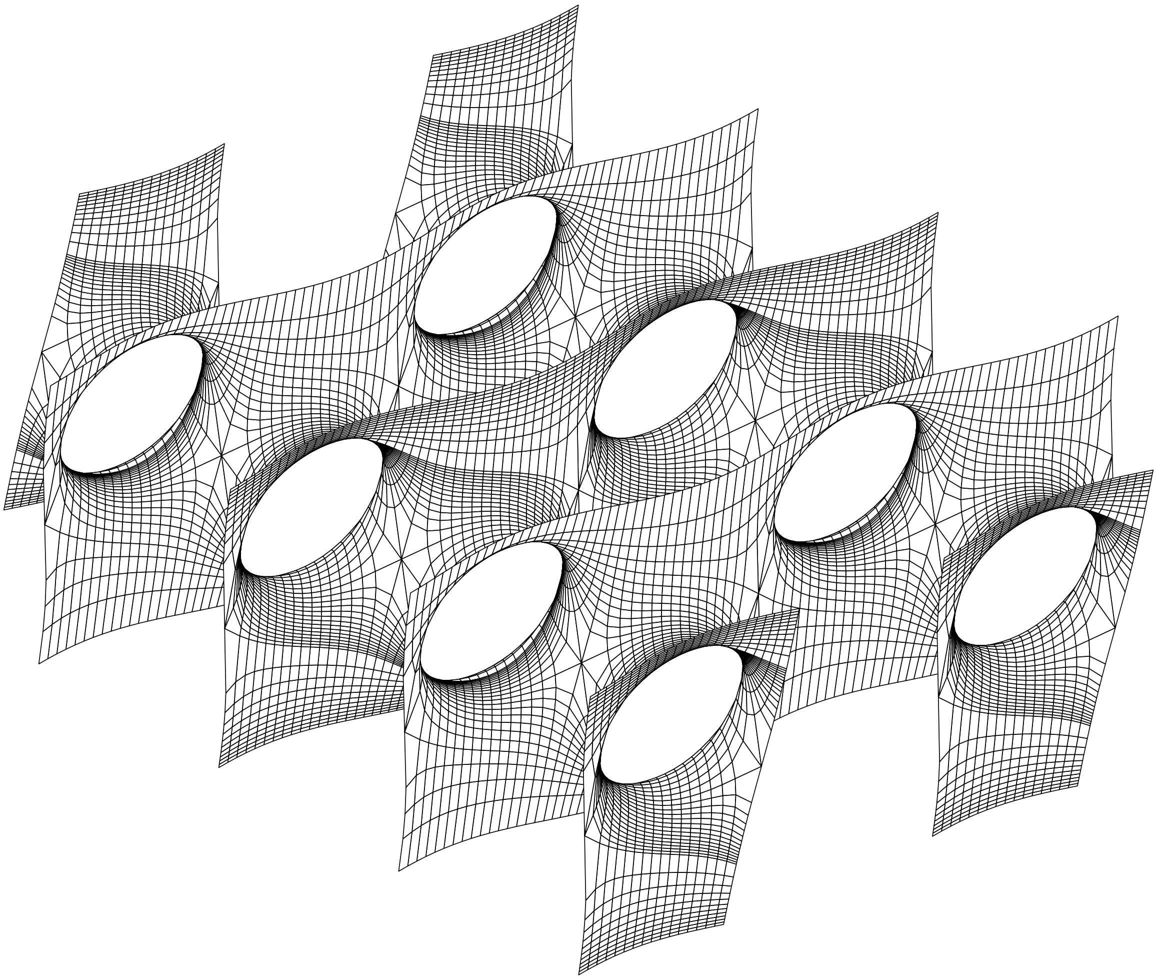


Abbildung 3.33: Konjugierter Zaun von Satteltürmen

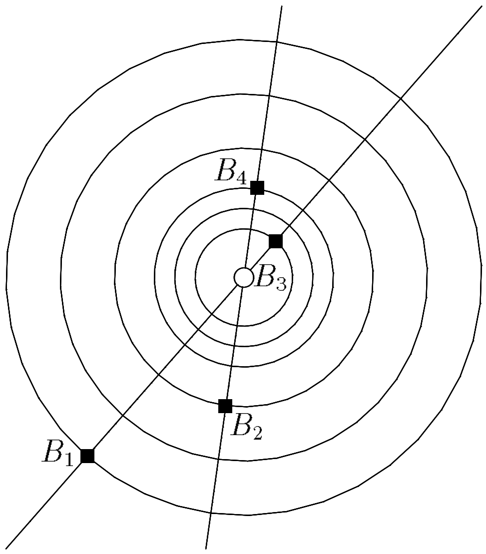


Abbildung 3.34: Aus 28 Parts bestehender Parameterbereich des Fundamentalstücks; diesmal sind nur die Grenzen der Parts eingezeichnet und die äußeren vier Parts abgeschnitten.

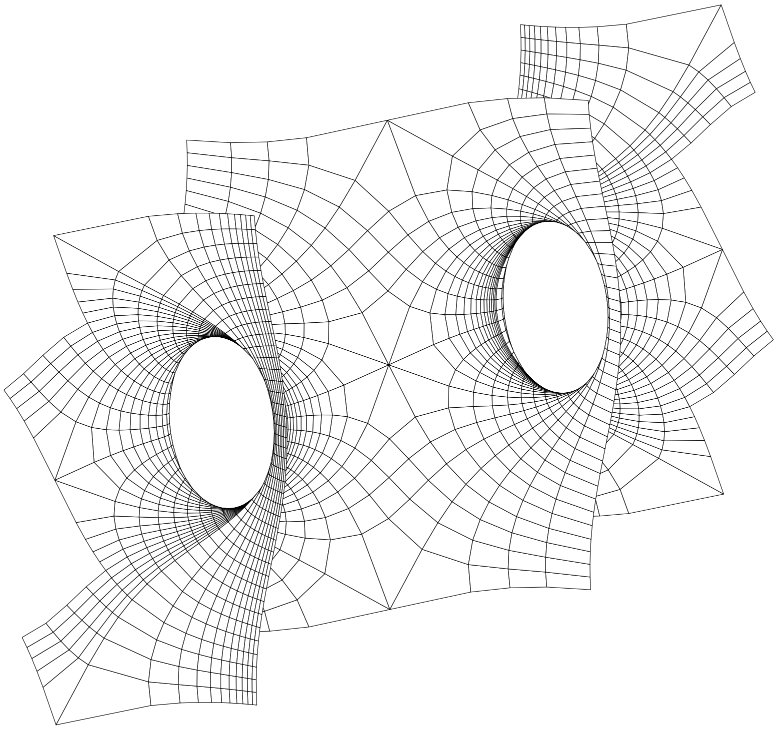


Abbildung 3.35: Translationsfundamentalbereich der Fläche, ihr Fundamentalstück ist schattiert.

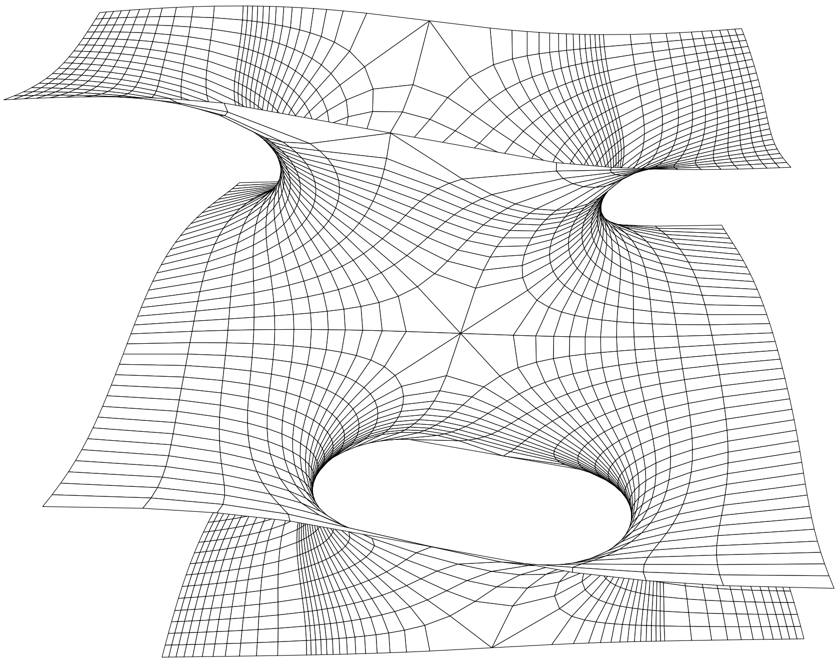


Abbildung 3.36: Translationsfundamentalbereich der Konjugierten, ihr Fundamentalstück ist schattiert.

Kapitel 4

Minimalflächen ohne Gleitspiegelung

Nun stellt sich die Frage, ob die in Kapitel 3 beschriebene 3-Parameter Minimalflächenfamilie noch verallgemeinert werden kann und auf welche Weise dies geschehen könnte.

Dazu sei als erstes bemerkt, daß W. H. Meeks und H. Rosenberg in [22, Theorem 9] gezeigt haben, daß alle eingebetteten, vollständigen, zweifach periodischen Minimalflächen vom Geschlecht 1 mit vier parallelen Enden, die eine Gleitspiegelsymmetrie besitzen, in der Familie des Abschnitts 3.5 enthalten sind. Weil wir uns weiterhin für eingebettete Flächen interessieren, müssen wir nach solchen ohne Gleitspiegelung suchen. Wenn als einzige Symmetrie die Punktspiegelung an den Verzweigungspunkten der Gaußabbildung erhalten bleibt, dann sind die entsprechenden Flächen nicht mehr unbedingt auf einem rechteckigen Torus, sondern auf einem schiefen definiert. In diesem Fall wird aus dem reellen Torusparameter α der komplexe konforme Parameter $Re^{i\alpha}$, oder anders ausgedrückt, man erhält einen zusätzlichen Parameter $R \in \mathbf{R}^+$. Außerdem ist der Parameter ϑ der assoziierten Familie nun unbestimmt, so daß für alle folgenden Familien gilt:

$$dh = e^{i\vartheta} \cdot dz \quad , \quad 0 \le \vartheta < \pi \quad .$$

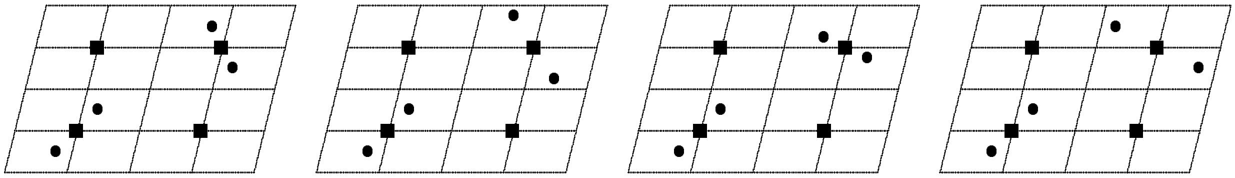
Die Gaußabbildung G muß aber nicht unbedingt verändert werden; denn allein dadurch, daß man schiefe Tori zuläßt, wodurch $D = R \cdot e^{i\alpha}$ gilt, gibt es i. a. keine antipodalen Paare von Verzweigungswerten der Gaußabbildung mehr, wie man leicht nachrechnen kann (vgl. Unterabschnitt 3.5.4). Dadurch ergeben sich neue Flächen, so daß aus der 3-Parameter Schar des vorherigen Kapitels eine 5-Parameter Familie wird. Natürlich ist noch unklar, ob es unter den neuen Flächen eingebettete gibt.

Zusätzlich zu den bisherigen Modifikationen kann man auch die Gaußabbildung noch unsymmetrischer gestalten, indem man die beiden Parameter ε und φ jeweils in zwei Parameter ε_1, ε_2, φ_1 und φ_2 aufspaltet. Hierdurch wird die Lage der 0-Enden und der ∞-Enden auf dem Torus weniger symmetrisch, wie in der Zeichnung auf der nächsten Seite skizziert ist. Die Gaußabbildung dieser 7-Parameter Familie lautet:

$$G = \frac{\mathcal{J}_D + \varepsilon_1 e^{i\varphi_1}}{\varepsilon_2 \mathcal{J}_D - e^{i\varphi_2}} \quad , \quad D = R \cdot e^{i\alpha} \quad ,$$

$$R \in \mathbf{R}^+ \quad , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 \le \varphi_1 < \alpha \quad , \quad 0 \le \varphi_2 < \alpha \quad , \quad 0 \le \varepsilon_1 \le 1 \quad , \quad 0 \le \varepsilon_2 \le 1 \quad .$$

$$\frac{\mathcal{J}_D + \varepsilon e^{i\varphi}}{\varepsilon \mathcal{J}_D - e^{i\varphi}} \qquad \frac{\mathcal{J}_D + \varepsilon_1 e^{i\varphi}}{\varepsilon_2 \mathcal{J}_D - e^{i\varphi}} \qquad \frac{\mathcal{J}_D + \varepsilon e^{i\varphi_1}}{\varepsilon \mathcal{J}_D - e^{i\varphi_2}} \qquad \frac{\mathcal{J}_D + \varepsilon_1 e^{i\varphi_1}}{\varepsilon_2 \mathcal{J}_D - e^{i\varphi_2}}$$



Null- und Polstellenverteilung der Gaußabbildung, bzw. Lage der Enden für unterschiedliche Parameter.

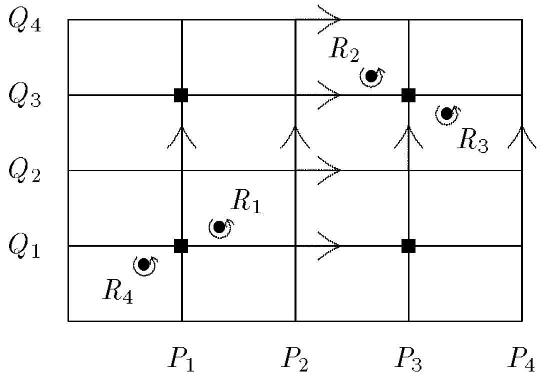
Die Anzahl der Parameter kann noch vergrößert werden, wenn man die Gaußabbildung ganz asymmetrisch macht:

$$G = \frac{\mathcal{J}_D + a}{\varepsilon \mathcal{J}_D + b} \qquad \text{mit} \quad \varepsilon \in \mathbf{R}_0^+ \;\;, \;\; a, b \in \mathbf{C} \quad \text{und} \quad a \neq \pm D \neq \frac{b}{\varepsilon} \;\;,\;\; a \neq \pm \frac{1}{D} \neq \frac{b}{\varepsilon} \;\;.$$

Zusammen mit dem assoziierten und den zwei konformen Parametern erhalten wir eine 8-Parameter Schar. Noch mehr Parameter sind nicht möglich, wenn wir Flächen vom Geschlecht 1 mit vier parallelen Scherk-Enden bekommen wollen; denn es gilt $dh = e^{i\vartheta} \cdot dz$, damit die Enden genau an den Null- und Polstellen der Gaußabbildung auftreten, und G ist eine Möbiustransformation von $\mathcal{J}_D$, wobei ε reell und nicht komplex ist, weil eine Multiplikation der Gaußabbildung mit einem Element aus $\mathbf{S}^1$ bloß eine Drehung der Fläche im Raum bewirkt.

Jetzt wird untersucht, für welche Konstellation der Parameter sich wieder eingebettete Flächen ergeben können.

Als erstes müssen dafür die möglichen Perioden der Flächen genauer angesehen werden, damit sichergestellt wird, daß die Flächen zweifach periodisch sind, weil vollständige, eingebettete, dreifach periodische Flächen bekanntlich mindestens Geschlecht 3 haben.



$$\begin{aligned} R_4 &= -R_1 \\ R_3 &= -R_2 \\ P_4 &= P_2 \\ Q_4 &= Q_2 \\ P_1 + R_1 &= P_2 \\ P_2 + R_2 &= P_3 \\ Q_2 + R_2 &= Q_3 \\ Q_2 + R_1 &= Q_1 \end{aligned}$$

Um die Perioden zu untersuchen, erinnere man sich an die Überlegungen aus Unterabschnitt 3.5.2 und beachte, daß die ersten Ergebnisse jenes Unterabschnitts, die hier nochmals zusammengefaßt sind, auch für schiefe Tori und die 7-Parameter Familie gelten. Wie man sieht, können alle Perioden durch die vier Perioden P_1, Q_1, R_1 und R_2 ausgedrückt werden.

In der 8-Parameter Schar lassen sich die Perioden natürlich ebenfalls durch jeweils eine Periode um ein 0-Ende, bzw. ein ∞-Ende und zwei Perioden auf Grund von Rückkehrschnitten darstellen. Nur verlaufen jetzt die Integrationswege anders, damit sie an die veränderte Null- und Polstellenverteilung angepaßt sind. Dadurch ergeben sich i. a. andere Beziehungen zwischen den verschiedenen Perioden. Die genauen Gleichungen zwischen den einzelnen Perioden sind jedoch für die folgenden Überlegungen zweitrangig. Deshalb verwenden wir die Bezeichnungen P_1 und Q_1 wie bisher, obwohl die beiden Perioden bei der 8-Parameter Familie i. a. entlang anderer Integrationswege entstehen.

Auf Grund der Verzweigungspunktsymmetrie sind die Perioden $\Re(P_1)$ und $\Re(Q_1)$ ungleich null. Die Perioden $\Re(R_1)$ und $\Re(R_2)$ liegen in der x-y-Ebene, da sie senkrecht zu den Normalen der Scherk-Enden sind, und sind auch nicht null.

Falls $\Re(R_1)$ und $\Re(R_2)$ linear unabhängige Perioden sind, könnte die Fläche zwar zweifach periodisch sein, aber sie ist in diesem Fall nicht eingebettet, weil ihre Enden dann in der Ebene des Periodengitters liegen und deshalb die Fläche durchdringen. Damit die hier betrachteten Flächen eingebettet sind, darf die Richtung der Enden auf keinen Fall in der Periodenebene liegen. Daher muß $\Re(R_1) = \pm\Re(R_2)$ gelten; denn auch für $\Re(R_1) = z\,\Re(R_2)$ oder $z\,\Re(R_1) = \Re(R_2)$ mit $z \in \mathbf{Z} \setminus \{-1, 0, 1\}$ kann die Fläche nicht eingebettet sein. Hieraus ergeben sich zwei Periodenbedingungen:

$$\Re(R_1)_x = \pm\Re(R_2)_x \qquad \text{und} \qquad \Re(R_1)_y = \pm\Re(R_2)_y \quad . \tag{4.1}$$

Die Perioden P_1 und Q_1 müssen nun so liegen, daß $\Re(P_1)$, $\Re(Q_1)$ und $\Re(R_1)$ in einem Gitter liegen. Daraus entstehen drei zusätzlich Periodenbedingungen:

$$l\,\Re(P_1) + m\,\Re(Q_1) + n\,\Re(R_1) = 0 \quad \text{mit } (l, m) \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{0\} \text{ und } n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \quad , \tag{4.2}$$

wobei i. a. unklar ist, welches Tripel (l, m, n) geeignet ist. Es muß $n \neq 0$ gelten, weil $\Re(P_1)$ und $\Re(Q_1)$ linear unabhängig sind; denn die Bilder der Verzweigungspunkte bilden im Raum ein Halb-Periodengitter, weil an ihnen ja gespiegelt wird, und die Perioden P_1 und Q_1 erzeugen dieses Verzweigungspunktgitter. Für die Flächen aus Kapitel 3 ist das Tripel entweder $(0, -1, 1)$ oder $(1, 0, 1)$. Wenn man nach neuen Minimalflächen mit ähnlichen Parametern, wie sie bei den eingebetteten Flächen auftreten, sucht und hofft, daß diese Flächen in einer gemeinsamen größeren eingebetteten Schar liegen, ist es naheliegend, die gleichen Periodenbedingungen wie bisher aufzustellen.

Insgesamt erhalten wir eine 8-Parameter Schar und 5 Periodenbedingungen; und in Kapitel 3 sind schon zwei miteinander verbundene 3-Parameter Unterfamilien von eingebetteten Flächen beschrieben. Deshalb ist es relativ unwahrscheinlich, noch eine größere Unterfamilie von eingebetteten Flächen in dieser 8-Parameter Schar zu finden.

Um etwas mehr über die Familie zu erfahren, habe ich diese Flächen auch mit Hilfe des Programms GRAPE am Computer untersucht (s. Abb. 4.1). Hierzu wurden die Flächenparameter variiert und die Perioden ausgerechnet. Dabei sind keine neuen eingebetteten Flächen gefunden worden (s. Abb. 4.2).

Außerdem wurde das Broyden-Verfahren (mehrdimensionale Sekanten Methode) aus [27, Section 9.7] verwendet, um zu versuchen das Periodenproblem numerisch zu lösen. Wenn man die Startparameter in der Nähe der bekannten 3-Parameter Familie wählt, identifiziert das Verfahren sehr schnell ein Element dieser 3-Parameter Familie als zweifach periodische Fläche. Falls man sich mit den Startwerten etwas weiter von den bekannten Flächen entfernt oder gar die Anfangsparameter ganz willkürlich wählt, findet das Broyden-Verfahren keine zweifach periodischen Flächen mehr.

Möglicherweise gibt es in der gesamten 8-Parameter Schar keine weiteren eingebetteten Flächen. Beweisen kann man nämlich, daß es in der 4-Parameter Unterfamilie, die aus der 3-Parameter Schar des 3. Kapitels durch Hinzunahme des assoziierten Parameters ϑ entsteht, keine neuen eingebetteten Flächen gibt. Wenn $0 \neq \vartheta \neq \pi/2$ gilt, entfällt die Gleitspiegelsymmetrie der 3-Parameter Familie. Im nächsten Absatz wird gezeigt, daß sich in dieser Schar nur für $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi/2$ eingebettete Flächen ergeben. Hier tritt also nicht solch ein Phänomen auf, wie in der dreifach periodischen Flächenfamilie aus [21], bei der das Gyroid in der assoziierten Familie zwischen dem konjugierten Paar der Schwarzschen P-Fläche und der D-Fläche liegt (siehe [7]).

Als erstes betrachten wir noch einmal die Perioden der Flächen zum festen Parameter $\vartheta = \pi/2$ (vgl. 3.5.2 S. 84) und bezeichnen sie hier mit P^*, damit man sie von den allgemeinen Perioden der 4-Parameter Schar unterscheiden kann. Für die Perioden der 3-Parameter Familie gilt:

$$\begin{aligned} \Re(R_1^*) = \Re(Q_1^*) \quad &\text{und} \quad \Im(R_1^*) = -\Im(P_1^*) \\ \Longrightarrow \qquad R_1^* \quad &= \quad \Re(Q_1^*) - i\,\Im(P_1^*) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Re(R_2^*) = -\Re(Q_1^*) \quad &\text{und} \quad \Im(R_2^*) = -\Im(P_1^*) \\ \Longrightarrow \qquad R_2^* \quad &= \quad -\Re(Q_1^*) - i\,\Im(P_1^*) \ . \end{aligned}$$

Für eine Fläche mit beliebigem assoziierten Parameter ϑ gilt:

$$R_1 = e^{i(\vartheta - \frac{\pi}{2})} R_1^* \qquad \text{und} \qquad R_2 = e^{i(\vartheta - \frac{\pi}{2})} R_2^* \ ,$$

$$\begin{aligned} \text{daher folgt:} \quad \Re(R_1) &= \Re\left(e^{i(\vartheta - \frac{\pi}{2})} R_1^*\right) \\ &= \Re\left(\left(\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)\right)\left(\Re(Q_1^*) - i\,\Im(P_1^*)\right)\right) \\ &= \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \Re(Q_1^*) + \sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \Im(P_1^*) \\ \text{und genauso folgt:} \quad \Re(R_2) &= -\cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \Re(Q_1^*) + \sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \Im(P_1^*) \ . \end{aligned}$$

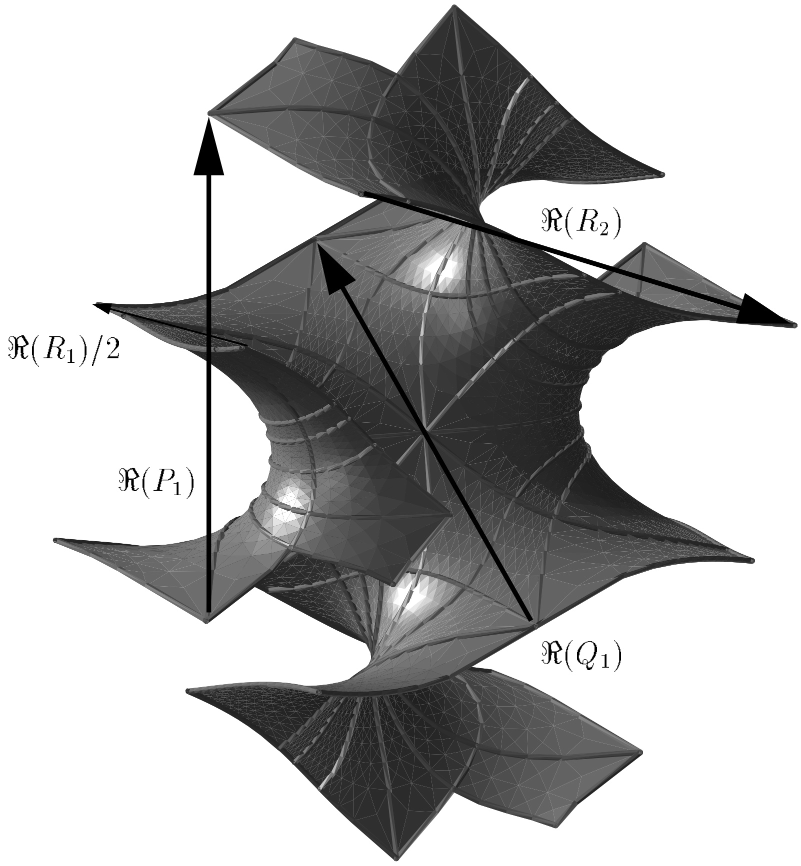


Abbildung 4.1: Nicht eingebettetes Element der Flächenfamilie, die Pfeile stellen die vier Perioden dar.

Damit eingebettete Flächen entstehen, muß unter anderem die Periodenbedingung (4.1) gelten. Falls $\Re(Q_1^*)$ und $\Im(P_1^*)$ linear unabhängige Vektoren sind, folgt aus $\Re(R_1) = \Re(R_2)$ sofort $\vartheta = z\pi$ mit $z \in \mathbf{Z}$. Weil wir $\vartheta \in [0, \pi)$ wählen wollen, gilt daher $\vartheta = 0$. Aus $\Re(R_1) = -\Re(R_2)$ folgt ebenso leicht, daß $\vartheta = \pi/2$ ist. Wenn $\Re(Q_1^*)$ und $\Im(P_1^*)$ linear abhängig sind, schreiben wir $\Im(P_1^*) = r\,\Re(Q_1^*)$ mit $r \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Man erinnere sich, daß wegen der Punktspiegelsymmetrie an den Verzweigungspunkten $\Im(P_1^*) \neq 0 \neq \Re(Q_1^*)$ gilt. Aus

$$\left(r \sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)\right) \Re(Q_1^*) = \pm \left(r \sin\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right)\right) \Re(Q_1^*)$$

foglt wiederum, daß $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi/2$ gelten muß. Insgesamt ergibt sich damit:

$$\Re(R_1) = \Re(R_2) \iff \vartheta = 0 \tag{4.3}$$

$$\text{und} \qquad \Re(R_1) = -\Re(R_2) \iff \vartheta = \frac{\pi}{2}\ . \tag{4.4}$$

Deshalb existieren in dieser 4-Parameter Schar keine anderen eingebetteten Minimalflächen als die beiden in Kapitel 3 beschriebenen 3-Parameter Flächenfamilien.

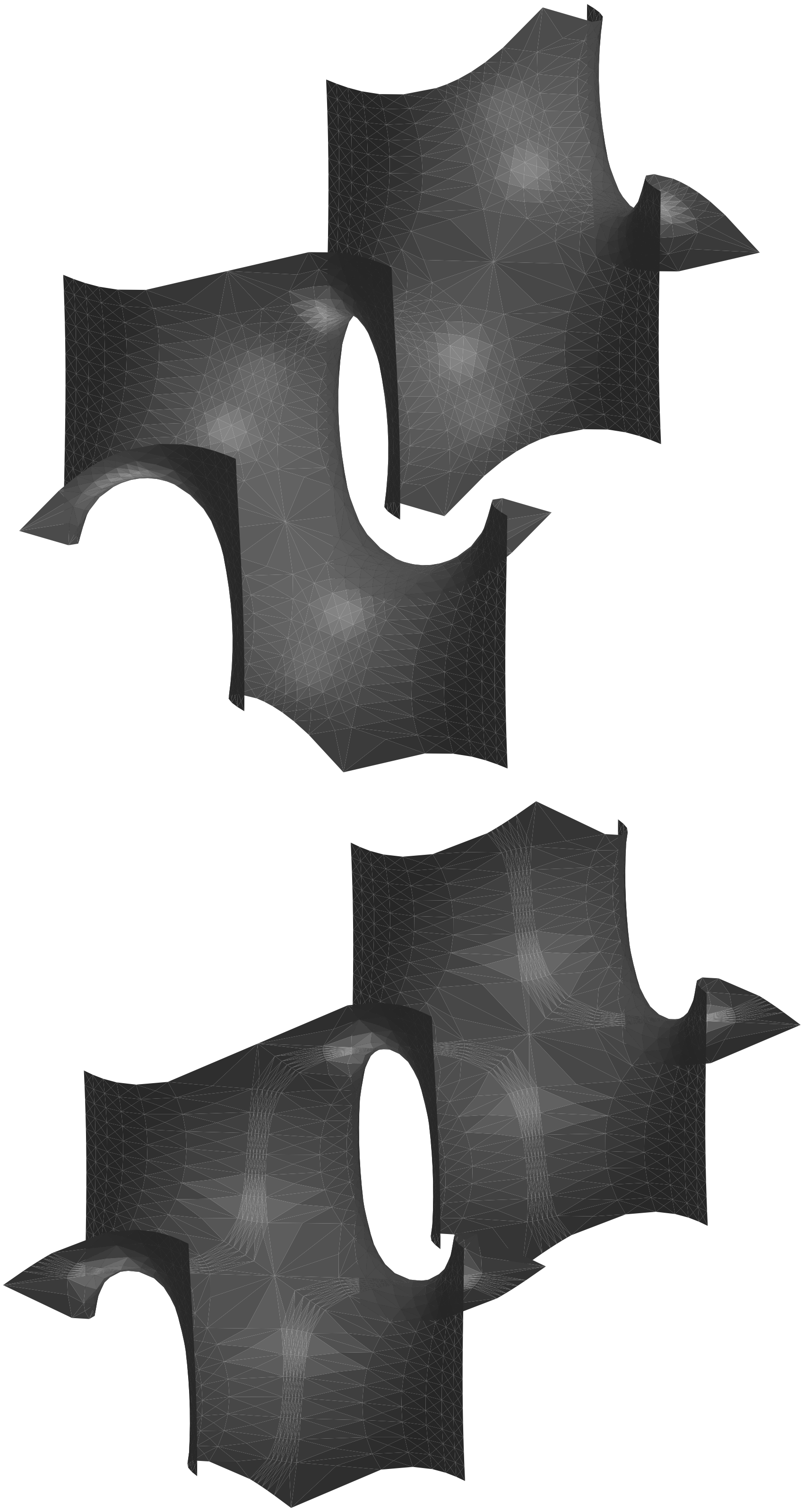


Abbildung 4.2: Flächen auf rhombischen Tori in der Nähe des quadratischen Torus. In diesem Bild scheinen die Perioden der Enden zwar modulo Vorzeichen gleich zu sein (es gilt $\vartheta = \pi/2$), aber es entsteht trotzdem noch eine dritte Periode. Je näher man dem quadratischen Torus kommt, desto kleiner wird die dritte Periode; und es entsteht eine Fläche aus dem 3. Kapitel, wenn der Torus quadratisch ist.

Durch die Versuche, mit Hilfe von GRAPE neue eingebettete Flächen zu finden, habe ich den Eindruck gewonnen, daß möglicherweise für die gesamte Flächenschar $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = \pi/2$ gelten muß, damit die Periodenbedingungen (4.1) erfüllt sind. Im Gegensatz dazu liefert das Broyden-Verfahren, wenn es auf die z-Komponente der Bedingung (4.2) mit den Tripeln $(0, m, n)$ und $(l, 0, n)$ angewandt wird, auf nicht rechteckigen Tori für den assoziierten Parameter von null und $\pi/2$ verschiedene Werte. Für rhombische Tori kann dies auch bewiesen werden. Weil $\Re(R_1)_z = 0$ ist, läßt sich die oben genannte Bedingung als

$$\Re\left(e^{i\vartheta}\int dz\right) = 0$$

schreiben. Für einen Integrationsweg entlang einer Diagonalen eines rhombischen Torus gilt mit $(\mathcal{J}_D{}')^2 = \mathcal{J}_D{}^2(\mathcal{J}_D{}^2 - i(R^2 - 1/R^2) + 1/\mathcal{J}_D{}^2)$ (vgl. Unterabschnitt 1.4.3):

$$\begin{aligned}
\int dz &= \int \frac{d\mathcal{J}_D}{\mathcal{J}_D{}'} \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt}{\sqrt{it^2\left(it^2 + \frac{1}{it^2} - \left(iR^2 + \frac{1}{iR^2}\right)\right)}} \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}\,dt}{\sqrt{1 + t^2\left(R^2 - \frac{1}{R^2} - t^2\right)}} \quad \in \quad e^{i\frac{\pi}{4}}\,\mathbf{R} \\
\text{oder} \qquad \int dz &= \int_{-1/R}^{1/R} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}\,dt}{\sqrt{1 + t^2\left(\frac{1}{R^2} - R^2 - t^2\right)}} \quad \in \quad e^{-i\frac{\pi}{4}}\,\mathbf{R} \quad ,
\end{aligned}$$

da die Terme unter den Wurzeln jeweils nicht negativ sind. Wenn man nun einen Weg betrachtet, der parallel zu einer der Kanten des Rhombus verläuft, so erkennt man, daß

$$\int dz \in \mathbf{R} \qquad \text{oder} \qquad \int dz \in i\mathbf{R}$$

nur dann gelten kann, wenn der Rhombus ein Quadrat ist, weil nur in diesem Fall der Winkel zwischen einer Kante und einer Diagonalen $\pi/4$ beträgt. Deshalb folgt aus der z-Komponente der Bedingung (4.2) mit den Tripeln $(0, m, n)$ und $(l, 0, n)$, daß für rhombische Tori, die nicht quadratisch sind, $0 \neq \vartheta \neq \pi/2$ gelten muß.

Literaturverzeichnis

[1] A. Arnez: *Hyperelliptische Minimalflächen.* Diplomarbeit, Bonn, in Vorbereitung.

[2] H. Behnke, F. Sommer: *Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen.* Springer-Verlag, Berlin, 3. Auflage, 1976.

[3] K. Chandrasekharan: *Elliptic Functions.* Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[4] C. C. Chen, F. Gackstatter: *Elliptische und hyperelliptische Funktionen und vollständige Minimalflächen vom Enneperschen Typ.* Mathematische Annalen 259, 359–369, 1982.

[5] C. J. Costa: *Example of a complete minimal immersion in $\mathbf{R}^3$ of genus one and three embedded ends.* Boletin da Sociedade Brasileira de Matemática 15, 47–54, 1984.

[6] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, O. Wohlrab: *Minimal Surfaces I and II.* Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[7] K. Große-Brauckmann, M. Wohlgemuth: *The Gyroid is Embedded and has Constant Mean Curvature Companions.* SFB 256 Preprint, Bonn, in Vorbereitung.

[8] D. Hoffman, H. Karcher, F. Wei: *The Genus One Helicoid and the Minimal Surfaces that Led to its Discovery.* Vorlesungsreihe Nr. 30, Bonn, 1993.

[9] D. Hoffman, W. H. Meeks III.: *A complete embedded minimal surface in $\mathbf{R}^3$ with genus one and three ends.* Journal of Differential Geometry 21, 109–127, 1985.

[10] D. Hoffman, W. H. Meeks III.: *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature.* Bulletin of the American Mathematical Society (New Series) 12, 134–136, 1985.

[11] D. Hoffman, W. H. Meeks III.: *Properties of properly embedded minimal surfaces of finite total curvature.* Bulletin of the American Mathematical Society (New Series) 17, 296–300, 1987.

[12] D. Hoffman, W. H. Meeks III.: *The strong halfspace theorem for minimal surfaces.* Inventiones mathematicae 101, 373–377, 1990.

[13] H. Jenkins, J. Serrin: *Variational Problems of Minimal Surface Type II.* Archive for Rational Mechanics and Analysis 21, 321–342, 1966.

[14] L. P. M. Jorge, W. H. Meeks III.: *The Topology of Complete Minimal Surfaces of Finite Total Gauß Curvature.* Topology 22, 203–221, 1983.

[15] H. Karcher: *Embedded minimal surfaces derived from Scherk's examples.* Manuscripta mathematica 62, 83–114, 1988.

[16] H. Karcher: *Construction of Minimal Surfaces.* Surveys in Geometry, 1–96, Tokyo, 1989, und Vorlesungsreihe Nr. 12, Bonn, 1989.

[17] H. Karcher: *Construction of higher genus embedded minimal surfaces.* Geom. and Top. of Sub. III, World Scientific, 174–191, 1990.

[18] F. J. Lopez, A. Ros: *On embedded complete minimal surfaces of genus zero.* Journal of Differential Geometry 33, 293–300, 1991.

[19] A. Lynker: *Einfach-periodische elliptische Minimalflächen.* Diplomarbeit, Bonn, 1993.

[20] W. H. Meeks III.: *A survey of the geometric results in the classical theory of minimal surfaces.* Boletin da Sociedade Brasileira de Matemática 12, 29–86, 1981.

[21] W. H. Meeks III.: *The theory of triply periodic minimal surfaces.* Indiana University Mathematics Journal 39 (3), 877–936, 1990.

[22] W. H. Meeks III., H. Rosenberg: *The Global Theory of Doubly Periodic Minimal Surfaces.* Geometry, Computation and Graphics 19, Amherst, 1988, und Inventiones mathematicae 97, 351–379, 1989.

[23] W. H. Meeks III., H. Rosenberg: *The Geometry of Periodic Minimal Surfaces.* Geometry, Computation and Graphics 34, Amherst, 1989.

[24] J. C. C. Nitsche: *Über ein verallgemeinertes Dirichletsches Problem für die Minimalflächengleichung und hebbare Unstetigkeiten ihrer Lösungen.* Mathematische Annalen 158, 203–214, 1965.

[25] R. Osserman: *A Survey of Minimal Surfaces.* Dover Publications, Inc., New York, 1986.

[26] K. Polthier, M. Rumpf: *A Concept For Time-Dependent Processes.* SFB 256 Report No. 13, Bonn, 1994, und Visualization in Scientific Computing, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[27] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery: *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing.* Camebridge University Press, Camebridge, 2nd edition, 1992.

[28] T. Radó: *The problem of least area and the problem of Plateau.* Mathematische Zeitschrift 32, 763–796, 1930.

[29] H. Rosenberg: *Some recent developments in the theory of properly embedded minimal surfaces in* $\mathbf{R}^3$. Séminaire BOURBAKI, 44ème année, 1991-92, n° 759, 01–64, 1992.

[30] H. F. Scherk: *Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen.* Journal für die reine und angewandte Mathematik 13, 185–208, 1835.

[31] R. Schoen: *Uniqueness, symmetry, and embeddedness of minimal surfaces.* Journal of Differential Geometry 18, 791–809, 1983.

[32] M. Steffens: *Minimalflächen auf Sphären und Tori.* Diplomarbeit, Bonn, 1995.

[33] E. C. Thayer, M. Wohlgemuth: *Existence and Non-Existence of Some Embedded, Doubly Periodic Minimal Surfaces.* G.A.N.G. Preprint, Amherst, in Vorbereitung.

[34] F. Wei: *The Existence and Topology of Properly Embedded Minimal Surfaces in* $\mathbf{R}^3$. Dissertation, Amherst, 1991.

[35] F. Wei: *Some existence and uniqueness theorems for doubly periodic minimal surfaces.* Inventiones mathematicae 109, 113–136, 1992.

[36] M. Wohlgemuth: *Abelsche Minimalflächen.* Diplomarbeit, Bonn, 1988.

[37] M. Wohlgemuth: *Vollständige Minimalflächen höheren Geschlechts und endlicher Totalkrümmung.* Doktorarbeit, Bonn, 1993, und Bonner Mathematische Schriften Nr. 262, Bonn, 1994.